M

Matemáticas 3

Tercer grado

Víctor García Montes
Roberto Villaseñor Spreitzer
María Delia Montes Heredia

TERRA
ESFINGE

Dirección general: Gabriel Torres Messina
Dirección editorial: Rosa María Núñez Ochoa
Edición: Leoncio Montiel Mejía
Diseño de portada: Adrián Trejo
Diseño de interiores: By Color Soluciones Gráficas
Diagramación: Jesús A. Díaz Castañeda y Rocío Mabarak Pensado
Revisión técnica: Demetrio Garmendia Guerrero
Corrección: Frida C. Pérez Medina
Iconografía: Guadalupe Sánchez
Ilustración: Ulises Ríos
Fotografía: Archivo Esfinge y Shutterstock

Matemáticas 3. Serie Terra

ISBN: 978-607-10-0594-6 Edición revisada

Primera edición: 2014
Séptima reimpresión: 2019

Impreso en México
Printed in Mexico

Presentación general

Matemáticas 3 forma parte de una serie de libros de texto de secundaria que se escribió teniendo en cuenta los resultados más recientes de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Desarrolla el enfoque de resolución de problemas, el cual se reconoce como un enfoque didáctico para propiciar un aprendizaje de las matemáticas de largo plazo y susceptible de ser extendido y aplicado en situaciones muy diversas.

Con base en lo anterior, este libro presenta un conjunto amplio de situaciones problema que, a partir de contextos conocidos por el estudiante o cercanos a él, le ayudan a construir nuevos conocimientos mediante la utilización de los ya existentes. Esta obra es resultado de varias versiones piloto probadas y desarrolladas en salones de clases.

La estructura didáctica del libro y el manejo de los contenidos favorecen la adquisición de competencias para la vida y comprenden conocimientos específicos de la asignatura, así como diversas habilidades y actitudes científicas y actitudes de relación con su entorno.

Consideramos además que este libro de texto es una herramienta auxiliar muy valiosa para el profesor en su práctica docente; esta obra permite orientar el tratamiento y la profundidad de los contenidos mediante la presentación de la información en un nivel y lenguaje adecuados para los estudiantes de secundaria. También facilita aplicación de diversas estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Presentación para el maestro

Matemáticas 3 forma parte de una serie de libros de texto de educación secundaria. Los libros están organizados en lecciones, y cada lección se desarrolla dentro del esquema general de bloques, ejes y temas. En el aula no necesariamente deben impartirse en el mismo orden en que aparecen en el libro; este dependerá de las características del grupo y de sus necesidades como profesor.

Las lecciones están estructuradas en las secciones que se describen a continuación:

Para recordar
Cada lección comienza con un cuestionamiento sencillo, basado generalmente en algún problema que involucra habilidades o conocimientos previos adquiridos en educación primaria o en la misma secundaria. El objetivo es que el estudiante retome alguna información que le será útil en el desarrollo de la lección, por ejemplo, procedimientos, conceptos o algoritmos y las situaciones con las que se relacionan. Conviene que, a partir del cuestionamiento, se genere brevemente un espacio de participación entre los alumnos.

Reto
Se plantea un problema en un contexto interesante o conocido por el alumno. La intención es motivar el interés del joven planteando una situación que, si bien representa un reto intelectual para él, puede resolverse tomando en cuenta el contexto en el que se desarrolla y los conocimientos previos del estudiante.

En algunos casos excepcionales, cuando las situaciones, que podrían proponerse para presentar un conocimiento o habilidad determinada, resulten muy complejas o artificiales, el tema se planteará directa y explícitamente como un problema de la disciplina matemática.

Pistas
Una vez planteada la situación problema, esta sección pretende orientar el razonamiento del estudiante hacia alguno de los caminos que llevan a la solución del problema planteado en el reto, pero sin proporcionársela. Con frecuencia esta sección y la anterior se trabajarán juntas, según sea necesario en el grupo.

No se pretende limitar al alumno a una forma de resolver el problema. Se le presenta sólo una de las varias posibilidades que tiene. Es importante que éstas surjan en el grupo durante la discusión, para lo cual es importante que usted profesor proporcione las orientaciones necesarias.

Formalización
Esta sección contiene, en forma resumida, los elementos del conocimiento establecido sobre los que se fundamenta la disciplina.

Incluye definiciones, algoritmos y explicaciones breves que ayudarán al estudiante a comprender el problema en el contexto del conocimiento científico.

El alumno no tiene por qué ser pasivo al trabajar esta sección. Se le va involucrando al pedirle que complete ideas o busque informaciones. También se plantean actividades o preguntas que llevan a reflexionar sobre lo realizado y que conducen a las conclusiones. Es importante que usted profesor participe en el cierre de este apartado.

Un nuevo reto
Una vez que los alumnos han resuelto el problema de la sección Reto y han formalizado el conocimiento que se pretende que adquieran, se plantea un nuevo reto con el fin de que lo resuelvan usando una estrategia más fluida que la empleada en el primer problema. La meta es conseguir que los alumnos se acostumbren gradualmente a buscar diferentes soluciones por iniciativa propia.

¡A practicar!
Esta sección tiene como propósito que el estudiante desarrolle ciertas habilidades y que ponga a prueba las estrategias de solución recientemente adquiridas. Para ello se exponen problemas semejantes a los incluidos en otras partes de la lección. Al igual que en el apartado anterior, no se trata de profundizar o de lograr la construcción de nuevos conocimientos o de la adquisición de habilidades adicionales, sino más bien de ampliar las situaciones y contextos de aplicación de lo aprendido en las secciones iniciales de la lección.

Es importante procurar que los alumnos sean cada vez más competentes para comprender la información que se les proporciona, y para resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente, con el fin de enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana.

Aplica las TIC
Esta es una sección que, en la mayoría de las lecciones, relaciona los contenidos matemáticos con la posibilidad de darles un tratamiento o una aplicación mediante el uso de la tecnología. En el anexo se presentan dos sugerencias para descargar gratuitamente programas y manuales de uso en español, que están muy relacionados con el eje Forma, Espacio y Medida, para que los alumnos lleven a cabo las actividades propuestas.

Lecturas, juegos, curiosidades y pasatiempos
Se encuentra en la mayor parte de las lecciones. Contiene textos breves sobre temas afines a los tratados en la lección, notas históricas o de actualidad, temas de matemática actual, o juegos, curiosidades y pasatiempos.

Por lo general, estos apartados no se limitan estrictamente a lo señalado en el contenido concreto de la lección, como lo especifica el programa de estudios. Se pretende contribuir a presentar las matemáticas no como algo acabado, sino como un conocimiento en evolución y en proceso de construcción.

Las lecciones se agrupan en bloques; al final de cada uno de ellos se incluye una evaluación que toma en cuenta todos los aprendizajes esperados que el alumno haya adquirido. Para diseñar estas evaluaciones se ha seguido el modelo de las pruebas PISA.

La sección bibliográfica incluye tanto libros impresos como referencias electrónicas. En ella, además de sugerir obras para los alumnos y los profesores, se consigna una lista de las principales obras consultadas.

Se concluye con un anexo, en el cual se muestra una breve descripción acerca del uso de los programas informáticos relacionados con el tema.

Los autores esperamos que la serie en general y este tercer libro en particular sean para usted, maestro, un coadyuvante fundamental en sus esfuerzos por generar en el aula un ambiente de trabajo basado en la creatividad, la colaboración y el intercambio de ideas, lo cual permitirá a sus alumnos desarrollar un concepto positivo de sí mismos como usuarios de las matemáticas.

Los autores

Presentación para el alumno

Matemáticas 3 forma parte de una serie de libros de texto de secundaria que tiene como propósitos fundamentales:

- Brindarte apoyo y orientación durante tu estudio de las matemáticas.
- Ayudar a que tu maestro organice el trabajo de clase.

Los libros de la serie utilizan el enfoque de resolución de problemas; esto significa que te presentan situaciones problema desarrolladas en contextos interesantes o de la vida cotidiana, a partir de las cuales puedes construir nuevos conocimientos y competencias con base en los que ya tienes. En estos libros encontrarás que frecuentemente se te invita a trabajar en equipo y a compartir e intercambiar con tus compañeros ideas acerca de los procesos matemáticos. Así mismo, en varias ocasiones tendrás la oportunidad de usar y de aprovechar las ventajas de las tecnologías de la información y la comunicación.

Creemos que solucionar cada una de las lecciones de este libro representará un reto para ti, pero estamos seguros de que una vez que superes cada uno de ellos tendrás más y mejores herramientas y competencias para ir avanzando en tu aprendizaje de las matemáticas, además de que podrás aplicar lo aprendido en otras áreas.

Te deseamos éxito.

Los autores

Contenido

Conoce tu libro

Estructura general

A continuación te presentamos las partes principales que integran tu libro:

Presentación del libro, del alumno y del profesor

Contenido

Dosificación de los contenidos

Los temas que estudiarás están distribuidos en cinco bloques:

Número del bloque

Competencias que se favorecen

Aprendizajes esperados

Evaluación

Ubicada al final de cada bloque, donde se valorará el nivel de logro de los aprendizajes esperados que adquiriste a lo largo del bloque

Bibliografía

Bibliografía consultada, para el alumno, para el profesor y sitios de internet y multimedia

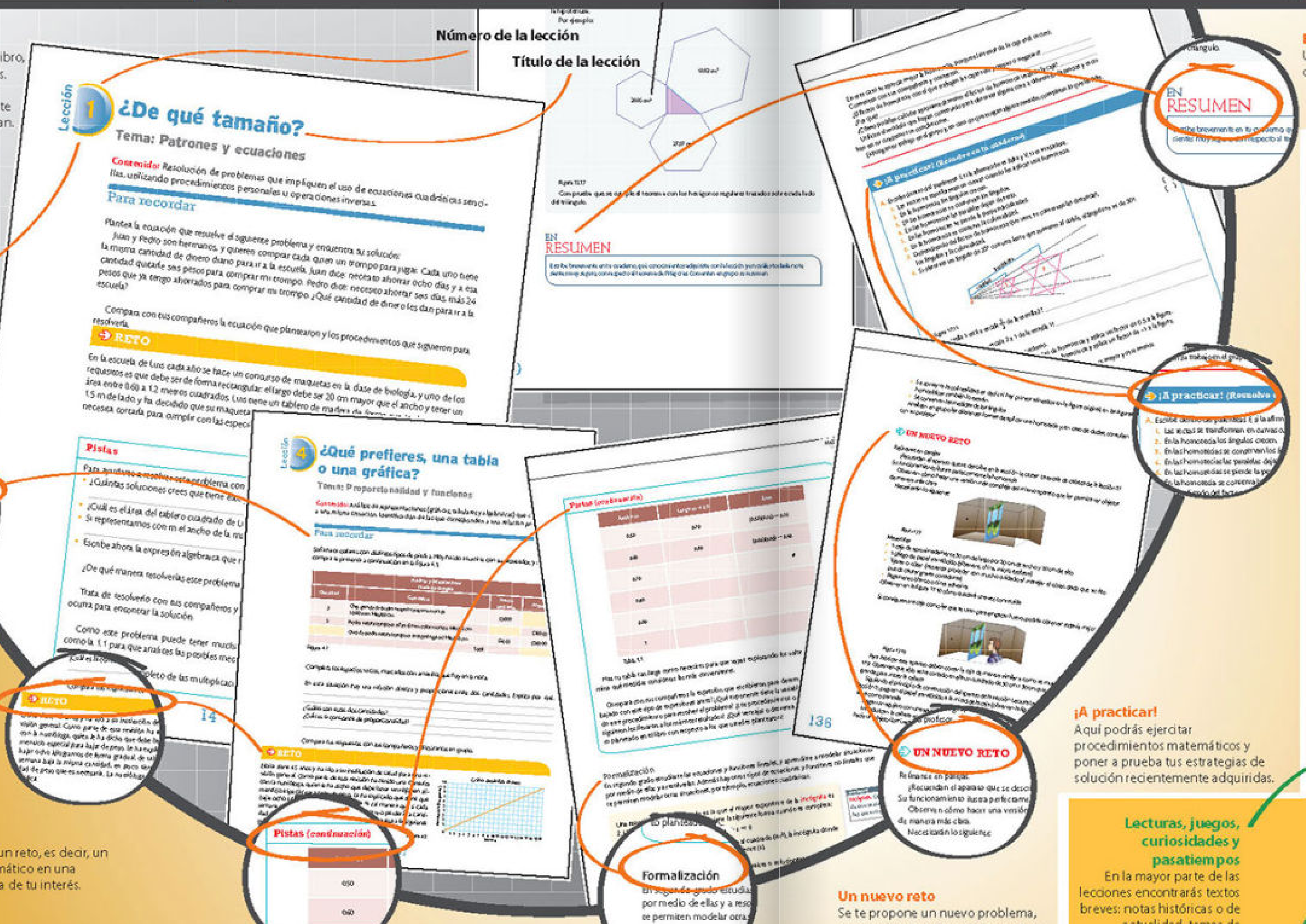
Secciones

Para poder abordar los contenidos del libro, los bloques están divididos en lecciones. Para que sigas paso a paso como está organizada una lección a continuación te presentamos las partes que la conforman.

Cada bloque está integrado por lecciones.

- Número de la lección
- Título de la lección

Tema y contenidos del programa correspondientes a la lección.



Para recordar

Cuestionamiento para que recuerdes alguna información que te será útil en el desarrollo de la lección.

Reto

Aquí se plantea un reto, es decir, un problema matemático en una situación que sea de tu interés.

Pistas

Esta sección incluye información que te permitirá tener elementos para resolver lo planteado.

Formalización

Contiene los elementos del conocimiento matemático como definiciones, procedimientos y explicaciones que te ayudarán a comprender la solución del reto.

Un nuevo reto

Se te propone un nuevo problema, que resolverás aplicando lo que has aprendido en las lecciones y secciones anteriores.

¡A practicar!

Aquí podrás ejercitar procedimientos matemáticos y poner a prueba tus estrategias de solución recientemente adquiridas.

En resumen

Ubicada al final de cada lección, para que compruebes tus aprendizajes.

Recursos didácticos de apoyo:

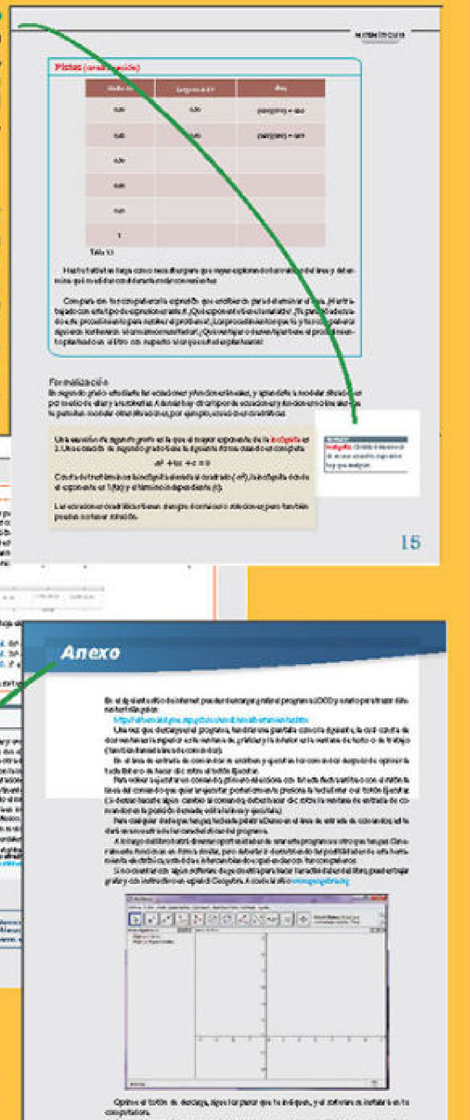
Son elementos que no forman parte de la estructura central del libro pero sirven para profundizar en los conceptos que estás estudiando, relacionarte con otras áreas del conocimiento, explorar recursos electrónicos y multimedia o presentarte lecturas interesantes.

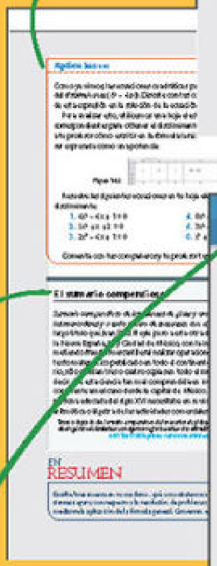
Glosario

En esta sección se definen y comentan las palabras, términos o conceptos para que el tema te sea de fácil comprensión.

Aplica las TIC

En esta sección tendrás la posibilidad de dar a los contenidos un tratamiento o una aplicación mediante el uso de la tecnología.





Lecturas, juegos, curiosidades y pasatiempos

En la mayor parte de las lecciones encontrarás textos breves: notas históricas o de actualidad, temas de matemática actual, o juegos, curiosidades y pasatiempos relacionados con el tema de la lección.

Anexo

Dosificación

La finalidad de este apartado es proporcionar elementos para establecer una distribución general de las lecciones de este libro a lo largo de las semanas del año escolar.

El libro *Matemáticas* 3 consta de 33 lecciones, para el estudio de cada lección se asigna una semana, es decir, cinco sesiones de trabajo. Los cinco días de una semana escolar son el plazo máximo para cumplir con la mayoría de las lecciones, ya que muchas de ellas se pueden cubrir en menos tiempo.

Usted puede ir adecuando los plazos de acuerdo con sus necesidades como profesor y las de cada grupo en particular.

A continuación le mostramos una manera de distribuir las distintas partes de una lección durante las cinco sesiones de trabajo. Considere esto como una referencia general que usted adaptará según el contenido que esté tratando y con el avance del grupo:

- En la primera sesión se trabajan las secciones Para recordar, Reto y Pistas.
- En la segunda sesión se retoma lo visto el día anterior y se formaliza el contenido.
- En la tercera sesión se propone resolver el segundo reto de la lección, mediante la sección Un nuevo reto.
- En las dos últimas sesiones se resuelven los ejercicios de las secciones ¡A practicar! y Aplica las TIC; se comenta la sección Lecturas, juegos, curiosidades y pasatiempos y se resume lo aprendido en la lección.
- Si destina cinco sesiones de trabajo para cada una de las lecciones del libro, ocupará 33 de las 40 semanas del año escolar para impartir el total de lecciones.

Quedarían siete semanas disponibles –es decir, 35 de los 200 días programados– para que usted aplique evaluaciones y lleve a cabo otras actividades.

Debido a que las evaluaciones se deben hacer al terminar cada bloque, el comienzo de cada uno se va a ir recorriendo uno o dos días cada vez; los días restantes pueden aprovecharse para elaborar resúmenes, atender alumnos que muestren cierto rezago o realizar algún proyecto adicional con el grupo.

BLOQUE I

Semana	Lección	Calendarización del profesor
1	1. ¿De qué tamaño?	
2	2. Iguales o parecidos	
3	3. Triángulos con la misma forma	
4	4. ¿Qué prefieres, una tabla o una gráfica?	
5	5. En caída libre	
6	6. ¿Y si le vas a varios números?	
7	7. Para contestar una pregunta	

BLOQUE II

Semana	Lección	Calendarización del profesor
8	8. ¿Cuántos eran?	
9	9. Gira o avanza	
10	10. De todo un poco	
11	11. Puros cuadrados	
12	12. El teorema de Pitágoras	
13	13. ¿Cuál es tu juego?	

BLOQUE III

Semana	Lección	Calendarización del profesor
14	14. ¡Buen fin de semana!	
15	15. Problemas con los triángulos	
16	16. Tales de Mileto	
17	17. Homotecia y semejanza	
18	18. ¡Todos a saltar!	
19	19. Es cuestión de resistencia	
20	20. ¿Quién va al teatro?	

BLOQUE IV

Semana	Lección	Calendarización del profesor
21	21. ¡Queremos pastel!	
22	22. Si gira, se forma	
23	23. ¿Qué tienen que ver los catetos?	
24	24. Las relaciones entre los catetos y la hipotenusa	
25	25. Razones trigonométricas	
26	26. ¿Quién va más rápido?	
27	27. ¿Quién salió mejor?	

BLOQUE V

Semana	Lección	Calendarización del profesor
28	28. La dolce vita	
29	29. ¡Qué cortados!	
30	30. Volúmenes parecidos	
31	31. Volumen estimado	
32	32. Más oxígeno nos vendría bien	
33	33. Busca la equidad	

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de los contenidos de este bloque, el alumno:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Lección 1

¿De qué tamaño?

Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Para recordar

Plantea la ecuación que resuelve el siguiente problema y encuentra su solución:

Juan y Pedro son hermanos, y quieren comprar cada quien un trompo para jugar. Cada uno tiene la misma cantidad de dinero diario para ir a la escuela. Juan dice: "necesito ahorrar ocho días y a esa cantidad quitarle seis pesos para comprar mi trompo". Pedro dice: "necesito ahorrar seis días, más 24 pesos que ya tengo ahorrados para comprar mi trompo". ¿Qué cantidad de dinero les dan para ir a la escuela?

Compara con tus compañeros la ecuación que plantearon y los procedimientos que siguieron para resolverla.

RETO

En la escuela de Luis cada año se hace un concurso de maquetas en la clase de biología, y uno de los requisitos es que debe ser de forma rectangular: el largo debe ser 20 cm mayor que el ancho y tener un área entre 0.60 a 1.2 metros cuadrados. Luis tiene un tablero de madera de forma cuadrada que mide 1.5 m de lado, y ha decidido que su maqueta mida aproximadamente un metro cuadrado, por lo que necesita cortarla para cumplir con las especificaciones. ¿Cómo tendría que cortarla?

Pistas

Para ayudarte a resolver este problema contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas soluciones crees que tiene este problema? ______________ ¿Por qué?
____
- ¿Cuál es el área del tablero cuadrado de Luis? ______________
- Si representamos con m el ancho de la maqueta, ¿cómo representarías el largo? ______________
____
- Escribe ahora la expresión algebraica que representaría el área del rectángulo de la maqueta.

¿De qué manera resolverías este problema? ______________

Trata de resolverlo con tus compañeros y discutan sobre el mejor procedimiento que se les ocurra para encontrar la solución.

Como este problema puede tener muchas soluciones, te recomendamos llenar una tabla como la 1.1 para que analices las posibles medidas.

Haz un análisis completo de las multiplicaciones y divisiones realizadas hasta ahora:

Pistas (*continuación*)

Ancho m	Largo m + 20	Área
0.50	0.70	(0.50)(0.70) = 0.35
0.60	0.80	(0.60)(0.80) = 0.48
0.70		
0.80		
0.90		
1		

Tabla 1.1

Haz tu tabla tan larga como necesites para que vayas explorando los valores del área y determina qué medidas consideras las más convenientes.

Compara con tus compañeros la expresión que escribieron para determinar el área. ¿Has trabajado con este tipo de expresiones antes? ¿Qué exponente tiene la variable? ¿Te pareció adecuado este procedimiento para resolver el problema? ¿Los procedimientos que tú y tus compañeros siguieron los llevaron a los mismos resultados? ¿Qué ventajas o desventajas tiene el procedimiento planteado en el libro con respecto a los que ustedes plantearon?

Formalización

En segundo grado estudiaste las ecuaciones y funciones lineales, y aprendiste a modelar situaciones por medio de ellas y a resolverlas. Además hay otros tipos de ecuaciones y funciones no lineales que te permiten modelar otras situaciones, por ejemplo, ecuaciones cuadráticas.

Una *ecuación de segundo grado* es aquella en la que el mayor exponente de la incógnita es 2 y tiene la siguiente forma cuando es completa:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Consta de tres términos: la incógnita elevada al cuadrado (ax^2), la incógnita donde el exponente es 1 (bx) y el término independiente (c).

Las ecuaciones cuadráticas tienen siempre dos raíces o soluciones, pero también pueden no tener solución.

GLOSARIO

Incógnita. Cantidad desconocida en una ecuación cuyo valor hay que averiguar.

La ecuación de segundo grado es incompleta cuando carece de término independiente o del término en x, y pueden tener las siguientes formas:

$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 + bx = 0$$

Existen diferentes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, de los cuales aprenderás algunos en este curso.

UN NUEVO RETO

Erick y Fabiola están jugando a las adivinanzas matemáticas. Erick plantea la primera:

- Encuentra un número tal que la cuarta parte de su cuadrado sea igual a treinta y seis.

Cuando toca el turno a Fabiola, ella dice la siguiente:

- Encuentra un número tal que la cuarta parte de su cuadrado menos el doble del número sea igual a cero

Carlos plantea la siguiente:

- Encuentra un número tal que la cuarta parte de su cuadrado menos el doble del número sea igual a menos cuatro.

En equipos, discutan cómo pueden resolver cada una de las adivinanzas matemáticas y traten de plantear una ecuación que represente cada situación que se describe. Discutan si pueden utilizar el mismo procedimiento para resolver las tres ecuaciones que obtienen.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

En parejas, resuelvan los siguientes problemas. Traten de plantear la ecuación que representa cada situación.

1. Para cercar un terreno rectangular de 750 m², se han utilizado 110 m de tela de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?
2. Encontrar dos números naturales cuya diferencia sea dos y la suma de sus cuadrados sea 580.
3. Descomponer el número ocho en dos factores, de tal manera que la suma de ambos factores sea seis.
4. ¿Cuánto mide el lado de una caja cuadrada, que tiene de altura 5 cm y su volumen es de 2 000 cm³?

Compara con otras parejas tus procedimientos para solucionar los problemas anteriores y también las ecuaciones que plantearon.

Aplica las TIC

En equipos, y con ayuda de una hoja electrónica de cálculo, resuelvan el siguiente problema. Si requieres ayuda para escribir las fórmulas en la hoja de cálculo, pide a tu profesor que te oriente.

Un campo de futbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7 000 m².
¿Cuáles son sus dimensiones?

Aplica las TIC (*continuación*)

La hoja que generen debe ser similar a la siguiente:

B13 fx

	A	B	C	D
1	ancho	largo	área	
2	10	40	400	
3	11	41	451	
4	12	42	504	
5	13	43	559	
6	14	44	616	
7	15	45	675	
8	16	46	736	

Figura 1.1

Antes de elaborar la hoja electrónica de cálculo, representen con una letra el ancho del campo de futbol y contesten las siguientes preguntas:

- ¿Cómo representan el largo del campo?
- ¿Cómo representan el área del terreno?
- ¿Cómo escribirían estas representaciones en la hoja electrónica de cálculo? Si requieren ayuda, consulten a su profesor.

Completen la hoja hasta obtener la solución al problema.

Comparen sus hojas electrónicas de cálculo con otros equipos y vean si obtienen el mismo resultado.

Lectura

Ecuaciones

En tu curso de ciencias, que llevaste en segundo grado, utilizaste muchas fórmulas que representan la ecuación que modela las magnitudes, como la fuerza, la velocidad, la aceleración, la energía cinética y potencial, la potencia, etcétera. Haz un listado de estas fórmulas y discute con tus compañeros cuáles son ecuaciones cuadráticas y por qué.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas. Comenten en grupo su resumen.

Lección 2

Iguales o parecidos

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

Para recordar

En equipos, tracen las siguientes figuras.

- Un triángulo equilátero.
- Un triángulo isósceles que tenga un ángulo recto.
- Un triángulo escaleno.
- Un cuadrado.
- Un rectángulo.

Comparen con otros equipos sus figuras.
Escriban brevemente en qué se parecen y en qué son diferentes.

RETO

En parejas, lean el reto y propongan alguna forma de resolverlo.

Hoy, Lalo faltó a clases; para enterarse de lo que habían hecho y de la tarea que les dejaron, le habló por teléfono a Gerardo, quien le informó que habían trazado figuras congruentes y figuras semejantes, y que les dejaron la siguiente tarea sobre triángulos y cuadriláteros.

Determinar si los siguientes pares de figuras son semejantes o congruentes y por qué:

- Un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 cm, respectivamente; y otro que tenga un ángulo recto formado por dos de los lados del triángulo, con medidas 3 cm y 4 cm.
  ¿Son semejantes o congruentes los triángulos? ______ ¿Por qué? ______
- Dos triángulos cuyos ángulos midan 75°, 60° y 45° o 55° (no apunté bien, le dijo Gerardo a Lalo).
  ¿Cambia el triángulo si se toman sólo dos ángulos para su trazo? ______ ¿Por qué? ______
  ¿Son semejantes o congruentes los triángulos? ______ ¿Por qué? ______
  ¿La medida correcta del ángulo es 45° o 55°? ______ ¿Por qué? ______
- Dos cuadrados, uno de 6 cm por lado y otro de 5 cm.
  ¿Son semejantes o congruentes los cuadrados? ______ ¿Por qué? ______
- Un rectángulo con base de 8 cm y altura de 6 cm, y otro rectángulo formado por dos triángulos escalenos de 6, 8 y 10 cm por lado, respectivamente.
  ¿Son semejantes o congruentes los rectángulos? ______ ¿Por qué? ______
  ¿Cómo saben cuándo son semejantes dos figuras y cuándo son congruentes?

Comparen con otras parejas la solución que proponen al reto y comenten sus estrategias en el grupo, en caso necesario.

Pistas

En parejas, lean las siguientes pistas y, en caso de que tengan alguna duda, anótenla para que al final la expongan al grupo.

- Deben diferenciar entre figuras congruentes y figuras semejantes.

Relacionen las columnas, escribiendo en cada paréntesis la letra que corresponda.

C) Congruente	Tienen la misma forma y tamaño.	( )
	Tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.	( )
	Sus lados son proporcionales.	( )
S) Semejante	Al encimar las figuras coinciden en todos sus bordes.	( )

- Pueden trazar las figuras y recortarlas para analizarlas.
- Tracen las diagonales en los rectángulos. Cuando NO tienen una relación proporcional (es decir, cuando no son semejantes) al superponerlos, tratando de hacer coincidir sus diagonales, éstas no coinciden.

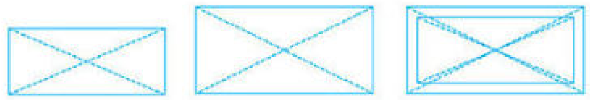


Figura 2.1

- Tracen las diagonales en los cuadrados. Si son proporcionales (es decir, son semejantes) al superponerlos sus diagonales coinciden.

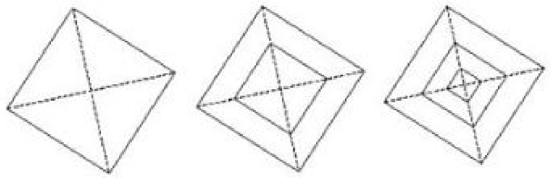


Figura 2.2

Escriban una breve definición para figuras congruentes y otra para figuras semejantes.
Son figuras congruentes ______
Son figuras semejantes ______

Expongan sus dudas en el grupo y escuchen las opiniones de otros compañeros.

Formalización

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma y sus lados tienen la misma proporción.

Por ejemplo en los siguientes triángulos:

Si observas en la figura 2.3 el triángulo CAL con una lente de aumento, se apreciará de la misma forma, pero de diferente tamaño.

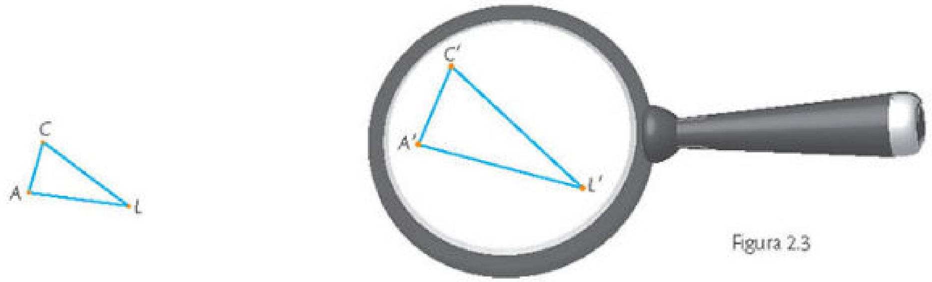


Figura 2.3

Verifica que se cumplen las siguientes igualdades y analiza la relación entre las medidas de los lados correspondientes.

$$\angle C = \angle C' \qquad CL = \frac{1}{2}C'L' \qquad \frac{CL}{LA} = \frac{C'L'}{L'A'}$$

$$\angle A = \angle A' \qquad LA = \frac{1}{2}L'A' \qquad \frac{LA}{AC} = \frac{L'A'}{A'C'}$$

$$\angle L = \angle L' \qquad AC = \frac{1}{2}A'C' \qquad \frac{AC}{CL} = \frac{A'C'}{C'L'}$$

Las razones son equivalentes y, por lo tanto, los lados son proporcionales.

> Para verificar que dos triángulos son semejantes, basta que dos de sus ángulos sean iguales o que las razones de los lados correspondientes sean iguales.

Si los triángulos cumplen con las igualdades anteriores, se dice que son semejantes, y se escribe:

$$\triangle CAL \sim \triangle C'A'L'$$

¿Por qué crees que en el triángulo baste verificar que dos de sus ángulos sean iguales para que sean semejantes? ______________________________

Dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados homólogos, es decir, los lados que se oponen a los ángulos iguales son proporcionales.

En parejas, verifiquen si dos triángulos congruentes cumplen con las condiciones de los triángulos semejantes y escriban sus conclusiones.

____
____
____
____
____
____
____
____

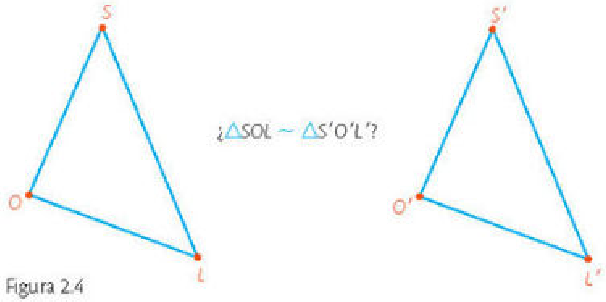


Figura 2.4

En los cuadrados y en los rectángulos

¿Por qué no mencionan sus ángulos?

____
____

> Igual que en el caso de los triángulos, si dos cuadrados o rectángulos tienen sus lados proporcionales, entonces serán semejantes.

> Una forma de comprobar la semejanza de varios cuadrados o rectángulos entre sí es utilizando el plano cartesiano. Observa la figura 2.5. Si varios rectángulos se colocan en el plano con un vértice sobre el origen de los ejes coordenados (L) y los dos lados que corresponden a dicho vértice sobre los ejes coordenados, y después se prolonga lo suficiente una diagonal que pasa por el origen, esta pasará por todos los vértices opuestos al origen (U, I, S, en la figura) de todos los rectángulos que sean semejantes entre sí.

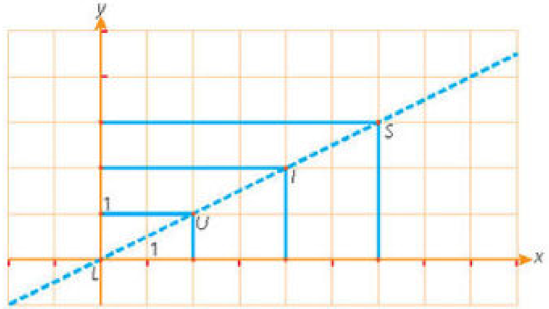


Figura 2.5

Observa que los otros vértices también son colineales.

GLOSARIO
Puntos colineales. Puntos que quedan sobre una recta.

¿Puedes trazar dos cuadrados que NO sean semejantes? ______________________

¿Por qué? ______________________

En parejas, verifiquen si dos rectángulos o dos cuadrados congruentes cumplen con las condiciones de los rectángulos semejantes y escriban sus conclusiones. Observen la figura 2.6.

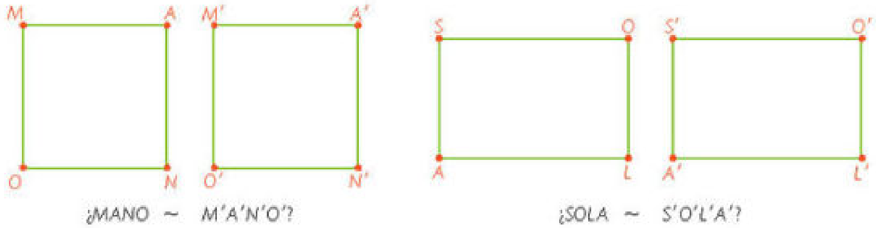


Figura 2.6

____
____

Escribe en el paréntesis F, si la afirmación es falsa y V, si es verdadera.

Todas las figuras semejantes son también congruentes. ( )

Todas las figuras congruentes son también semejantes. ( )

Trazo de figuras semejantes o congruentes

Una forma de trazar figuras semejantes o congruentes es la siguiente:

1. Traza un rectángulo ABCD.
2. Marca un punto O fuera del rectángulo.
3. Traza cuatro rectas que pasen una por cada vértice del rectángulo y el punto O.
4. Marca con un punto la misma distancia AO que OA'; BO que OB'; CO que OC' y DO que OD'.
5. Une los nuevos puntos encontrados para formar el rectángulo A'B'C'D'.

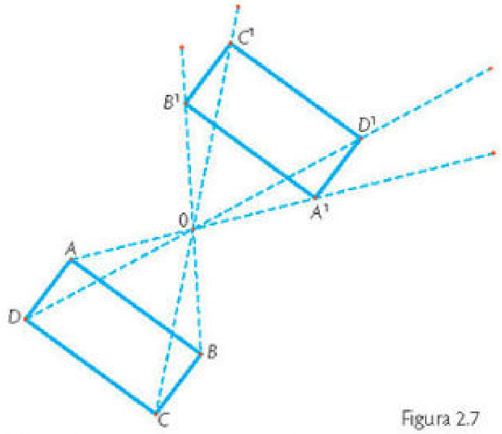


Figura 2.7

Comprueba que los rectángulos formados son semejantes.
¿Cuál es la razón de semejanza? ____
¿Cómo comprobaron tus compañeros que los rectángulos formados son semejantes? ____
¿Los rectángulos formados también son congruentes? ____

En caso de dudas, consulten a su profesor.

UN NUEVO RETO

En equipos, tracen un cuadrado de 10 cm por lado.

- Divídanlo en tantos triángulos o cuadriláteros como integrantes del equipo haya.
- Repartan las figuras entre los integrantes.
- Tracen una figura semejante a las que les tocó, de tal forma que al unir las piezas de cada uno, se forme un cuadrado de 14 cm por lado.
- Comprueben que las nuevas figuras trazadas sean semejantes a la original.

¿Cómo comprobaron que las figuras son semejantes? ____

En el caso de que no se forme el cuadrado, todo el equipo tendrá que analizar y resolver el problema.

Cada integrante del equipo explicará cómo resolvió el problema de la reproducción de la pieza que les tocó.

En equipo, llenen la siguiente tabla.

Forma de las piezas resultantes al dividir el cuadrado original	Medidas originales	Medidas de las figuras semejantes

Tabla 2.1

Escriban brevemente los métodos utilizados para calcular las medidas de las figuras semejantes.
____
____

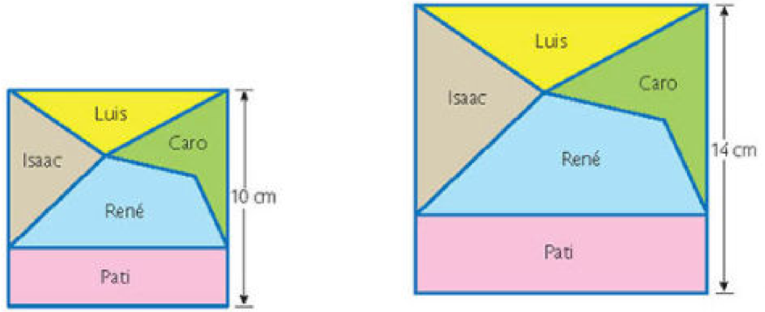


Figura 2.8

Expongan sus respuestas y estrategias en el grupo y enriquezcan con observaciones las exposiciones de otros equipos.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

Traza las siguientes figuras de acuerdo con las instrucciones.

1. En un plano cartesiano dibuja un rectángulo con su vértice en el origen como se muestra en la Formalización. Después traza una diagonal.
2. Traza otro rectángulo en el mismo plano, de tal forma que su diagonal coincida con la ya trazada, y comprueba midiendo lo que necesites que ambos rectángulos son semejantes.
3. Traza otro rectángulo en el mismo plano cartesiano, de tal forma que su diagonal NO coincida con la ya trazada. Comprueba que NO son semejantes.
4. Intenta hacer el mismo ejercicio, usando cuadrados.

La semejanza en los cuadrados

Con base en las indicaciones del ejercicio anterior, responde: ¿Encontrarás algún cuadrado en el que no coincidan sus diagonales al superponerlo a otro cuadrado? ____

¿Por qué? ____

Investiga qué es el pantógrafo y para qué se usa. De ser posible, usa uno para reproducir alguna figura.

En parejas:

1. Construya cada quien un triángulo para cada caso, cuyos ángulos midan:
   50°, 50° y 80°
   60°, 60° y 60°
   45°, 60° y 75°

2. Agrupen sus triángulos de acuerdo con las medidas de sus ángulos. Después contesten: ¿Por qué los triángulos de cada grupo tienen la misma forma? ____

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) *(continuación)*

En equipos, construyan un triángulo semejante al △PIO, pero cuyos lados midan el doble; tomen como referencia el punto M y el punto P''.

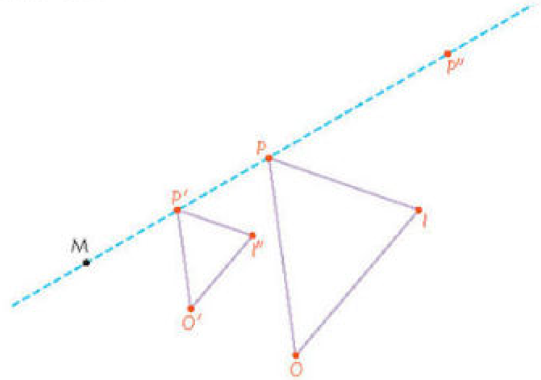


Figura 2.9

Midan la distancia PM y después la distancia P'M. ¿Cómo son estas medidas? ____________

Comprueben que el △P'I'O' mida la mitad del △PIO.

Escriban el factor de proporcionalidad entre los triángulos y compruébenlo midiendo la igualdad de sus ángulos.

____

____

____

Compartan en grupo sus respuestas y, en caso de dudas, consulten a su profesor.

Aplica las TIC

Usa algún software de geometría. Observa la ubicación de los comandos que se usarán.

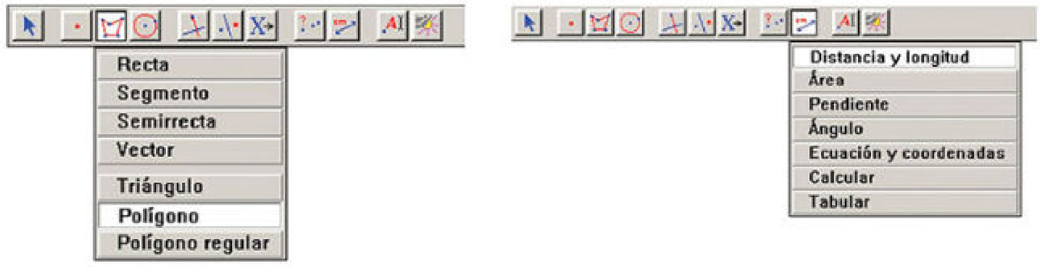


Figura 2.10

Comandos para trazar polígonos y calcular distancias.

1. Traza dos rectángulos de las medidas que quieras. Las que aparecen son para dejar claro el ejemplo.
2. Traza las diagonales de ambos rectángulos.

Aplica las TIC *(continuación)*

3. Configura la computadora para que te dé la medida de los lados de ambos rectángulos.
4. Calcula la razón de los lados homólogos de ambos rectángulos con el comando Calcular. Los lados homólogos son los que están dispuestos de la misma manera con respecto a los ángulos iguales.
5. Coloca uno de los rectángulos sobre el otro, tratando de hacer coincidir sus diagonales.
6. Modifica poco a poco uno de los rectángulos, de tal manera que fuerces a sus diagonales a coincidir con las del otro rectángulo. Observa con cuidado cómo van cambiando las razones.

Cuando coincidan las diagonales, redondea las razones al décimo más cercano.

¿Cómo quedaron las razones cuando coincidieron las diagonales? ____________

¿Por qué se puede decir que ahora los lados son proporcionales? ____________

$\frac{2.20 \text{ cm}}{2.73 \text{ cm}}$ Razón: 0.81 $\quad$ $\frac{1.11 \text{ cm}}{1.80 \text{ cm}}$ Razón: 0.62

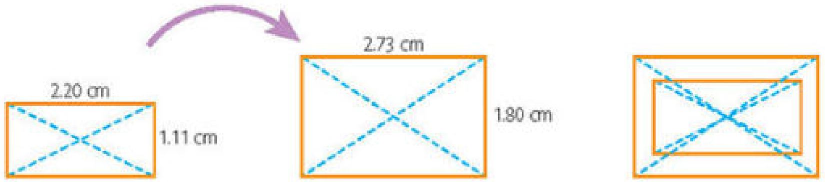


Figura 2.11

Describe en tu cuaderno esta actividad y haz algunos dibujos que lo ilustren. Usa los números que propusiste en tu ejercicio.

Pueden descargar gratis un software de geometría, con su manual en español, en la siguiente liga: www.geogebra.org Fecha de consulta: 15 de octubre de 2016.

Pasatiempo

La escala de cabeza

Hay un aparato que puedes construir tú mismo y que actúa de forma semejante a como lo hace el ojo humano. Ya sabes que las imágenes que se forman en la retina del ojo se forman al revés y más pequeñas de lo que realmente son. Realiza el siguiente aparato que te servirá para ver las cosas reflejadas en una hoja de papel, de cabeza y más pequeñas de lo que realmente son.

Necesitarás:

1. Una caja, en este ejemplo se usará una redonda (como los envases de avena que se muestran en la figura 2.12).
2. Un pedazo de papel de china, papel mantequilla o papel albanene blanco, un poco más grande que una de las tapas del bote redondo.
3. Una aguja o un alfiler.
4. Pegamento.

Instrucciones:

1. Consigue un envase de avena vacío.
2. Coloca el papel que hayas conseguido sobre una de las tapas, procurando que quede lo más estirado y liso posible.
3. Localiza el centro en la otra base del bote (puedes trazar dos cuerdas que no sean paralelas y sus mediatrices correspondientes; el corte de las mediatrices será el centro).
4. Con el alfiler perfora el centro que encontraste.

¡Está listo!, observa del lado del papel pegado algún objeto que esté iluminado para que veas su reflejo en el papel, en menor tamaño y de cabeza. De preferencia, cuando lo uses, cubre con tus manos o con alguna manta la parte por la que se reflejará el objeto para verlo con más claridad.

Comenta con un compañero por qué las figuras que se reflejan son semejantes a las originales.

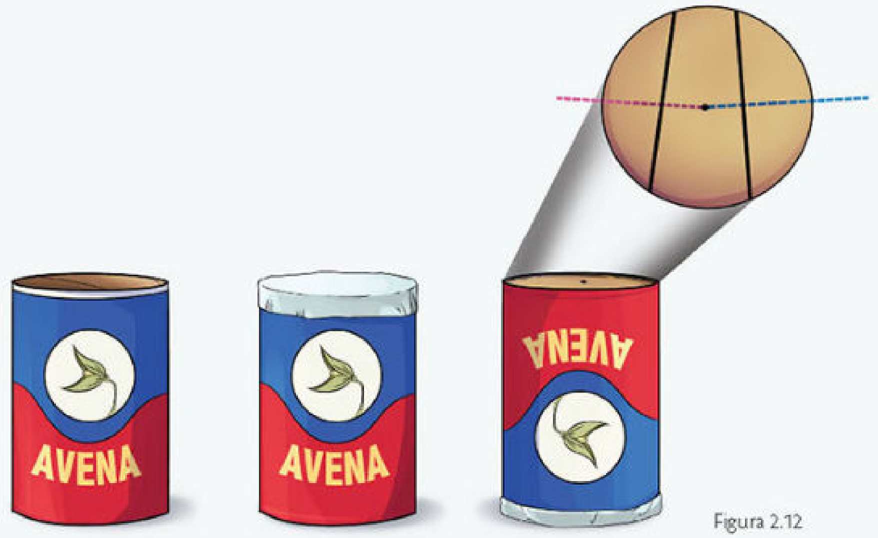


Figura 2.12

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la construcción de triángulos, cuadrados y rectángulos congruentes y semejantes. Comenten en grupo su resumen.

Lección 3

Triángulos con la misma forma

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Para recordar

En parejas, analicen y llenen la tabla 3.1.

Posibilidad de formar un triángulo

Medidas de los lados en centímetros	Forman un triángulo	¿Por qué?
15, 15 y 2		
9, 5 y 6		
12, 12 y 12		
	No	
		Porque la suma de la medida de cualesquiera de dos lados es mayor que la medida del tercer lado.

Tabla 3.1

Tracen los triángulos en su cuaderno para comprobar que llenaron correctamente la tabla y midan los ángulos interiores de los triángulos formados para comprobar que siempre la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°.

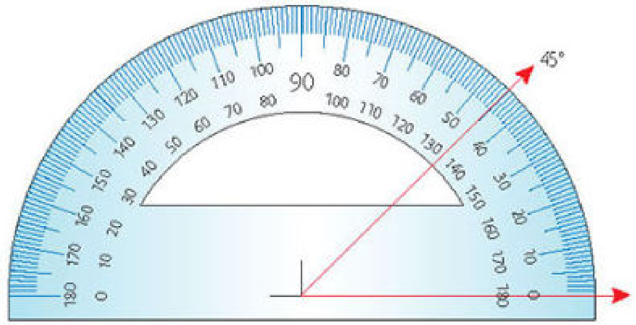


Figura 3.1

Comenten en el grupo cuándo sí y cuándo no es posible formar un triángulo con tres medidas dadas.

RETO

Lalo y Gerardo se reunieron para resolver una tarea sobre triángulos congruentes o semejantes que tenía que hacerse en parejas. La tarea consistía en:

Determinar si con algunos datos dados se obtiene un triángulo único o no.

Trazar en papel al menos dos triángulos de cada caso y comprobar sus predicciones.

a. Triángulo formado con los siguientes segmentos:

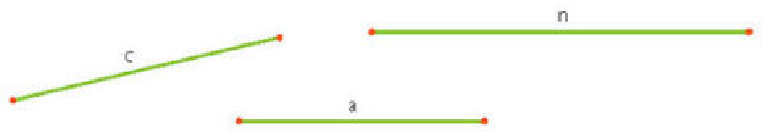


Figura 3.2

b. Triángulo con los siguientes segmentos formando entre ellos un ángulo como el que se muestra:

Figura 3.3

c. Triángulo con el siguiente segmento, que forma los ángulos que se indican:

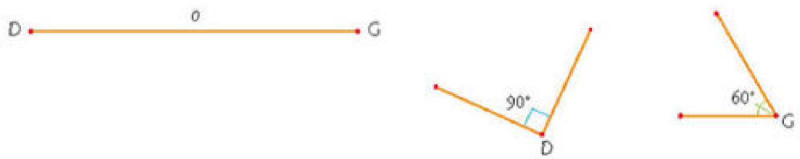


Figura 3.4

d. Triángulo con los siguientes ángulos internos:

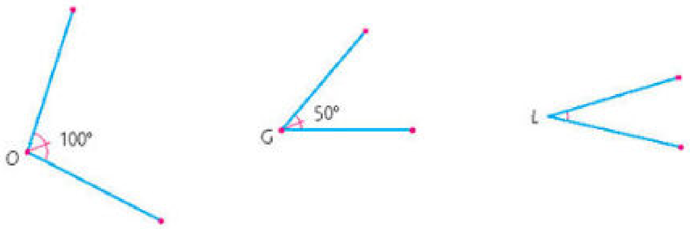


Figura 3.5

En el inciso a)

¿Los triángulos trazados por ustedes fueron iguales en forma y tamaño? ____________
Si comparan sus triángulos con los de otras parejas, ¿obtendrán los mismos resultados? ______
¿Por qué? ____________________________
Con los datos que se proporcionan, ¿se puede formar un triángulo único? ____________
¿Cuál es la razón entre la medida de cada lado de un triángulo y la medida de sus correspondientes en otro triángulo? ____________
¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ____________
¿Cuál es la razón entre sus áreas? ____________

En el inciso b)

¿Los triángulos que trazaron ustedes fueron iguales en forma y tamaño? ____________
Si comparan sus triángulos con los de otras parejas, ¿obtendrán los mismos resultados? ______
¿Por qué? ____________________________
Con los datos que se proporcionan, ¿se puede formar un triángulo único? ____________

¿Cuál es la razón entre la medida de cada lado de un triángulo y la medida de sus correspondientes en otro triángulo? ____________
¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ____________
¿Cuál es la razón entre sus áreas? ____________

En el inciso c)

¿Los triángulos trazados por ustedes fueron iguales en forma y tamaño? ____________
Si comparan sus triángulos con los de otras parejas, ¿obtendrán los mismos resultados? ______
¿Por qué? ____________________________
Con los datos que se proporcionan, ¿se puede formar un triángulo único? ____________
¿Cuál es la razón entre la medida de cada lado de un triángulo y la medida de sus correspondientes en otro triángulo? ____________
¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ____________
¿Cuál es la razón entre sus áreas? ____________

En el inciso d)

¿Los triángulos trazados por ustedes fueron iguales en forma y tamaño? ____________
Si comparan sus triángulos con los de otras parejas, ¿obtendrán los mismos resultados? ______
¿Por qué? ____________________________
Con los datos que se proporcionan, ¿se puede formar un triángulo único? ____________
¿Cuál es la razón entre la medida de cada lado de un triángulo y la medida de sus correspondientes en otro triángulo? ____________
¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ____________
¿Cuál es la razón entre sus áreas? ____________

Verifiquen que, en cada caso, aunque los triángulos resultantes sean de distinto tamaño, son semejantes porque tienen la misma forma y lados proporcionales.

Escriban sus conclusiones y solución del reto, y compárenlos con otras parejas.

Pistas

Antes de trazar los triángulos del reto, es necesario que sepan medir y trazar ángulos, conocer cuánto suman los ángulos interiores en un triángulo y poder calcular su perímetro y su área. Una vez trazados los triángulos pueden recortarlos y superponerlos para ver si son congruentes, esto es, que tienen la misma forma y tamaño.

En el caso de que solamente tengan la misma forma, además de comprobar la semejanza mediante los lados proporcionales (tienen la misma razón), pueden probar con las medianas. Al superponer los triángulos, es posible acomodarlos de tal forma que las medianas coincidan.

Escucha las opiniones de otros compañeros y equipos, y pregunta en caso de que tengas alguna duda.

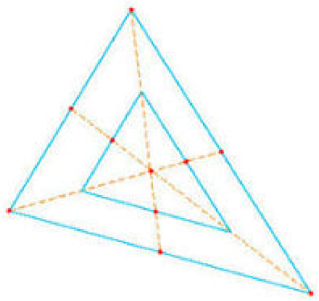


Figura 3.6

Formalización

Se llaman triángulos congruentes a aquellos que tienen la misma forma y tamaño. Un triángulo está definido cuando en su descripción se brindan los elementos necesarios para su construcción.

Hay tres criterios de congruencia para definir un triángulo, en los que se estipulan los datos mínimos y necesarios para su construcción:

I. Un triángulo está definido si conocemos la medida de cada uno de sus tres lados (LLL).

Por supuesto, al conocer la medida de cada uno de sus lados es posible saber si se trata de un triángulo equilátero, isósceles o escaleno.

Ejemplo: Traza un triángulo que tenga por lados 3, 4 y 5 cm, respectivamente. ¿Qué tipo de triángulo es?

1. Traza un segmento AB de 3 cm.
2. Apoya el compás en A y traza un círculo de 4 cm.
3. Apoya el compás en B y traza un círculo de 5 cm.
4. Llama C a una de las intersecciones de los arcos.
5. Une A con C y B con C.

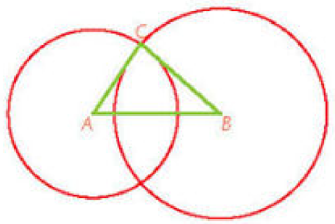


Figura 3.7

II. Un triángulo está definido si conocemos la medida de dos de sus lados y la del ángulo que está entre ellos (LAL).

Ejemplo: Traza un triángulo que tenga 3 cm en un lado, un ángulo de 45° y luego un lado de 2.1 cm. ¿Qué tipo de triángulo es?

1. Traza un segmento AB de 3 cm.
2. Traza en A (o en B) un ángulo de 45°.
3. Mide el lado de tal manera que tenga 2.1 cm.
4. Llámale C al extremo del segmento.
5. Une C con B.

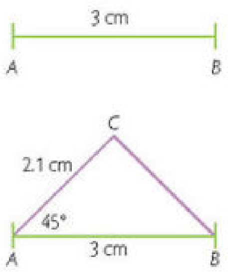


Figura 3.8

III. Un triángulo está definido si conocemos la medida de dos de sus ángulos y la del lado que está entre ellos (ALA).

Ejemplo: Traza un triángulo que tenga un lado de 4 cm y un ángulo de 60° en cada uno de sus extremos. ¿Qué tipo de triángulo es?

1. Traza un segmento AB de 4 cm.
2. Traza en A y en B, respectivamente, un ángulo de 60°.
3. Prolonga los lados hasta que se intersequen.
4. Llámale C a la intersección.
5. Ha quedado formado el triángulo ABC.

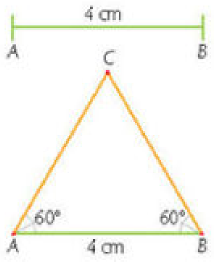


Figura 3.9

Para el trazo de triángulos semejantes (aquellos que tienen sus lados respectivamente proporcionales y sus ángulos homólogos iguales), se definen también tres criterios:

I. Dos triángulos son semejantes si dos pares de ángulos correspondientes son iguales (AAA).

Por supuesto, al conocer la medida de cada uno de sus ángulos podremos saber también si se trata de un triángulo equilátero, un isósceles o un escaleno. Por ejemplo:

Trazar un triángulo semejante al △ABC.

Sabemos que es triángulo rectángulo (porque tiene un ángulo recto) y además tiene dos ángulos de 45°.

Por sus lados, ¿qué tipo de triángulo será?

¿Cuántas posibilidades tienes de dibujar un triángulo semejante al △ABC?

Coméntalo con tus compañeros.

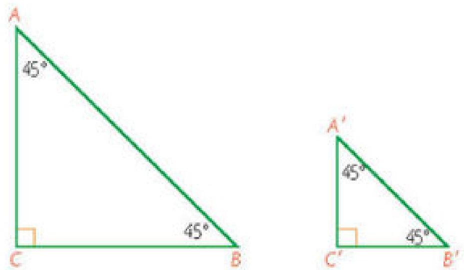


Figura 3.10

II. Dos triángulos son semejantes si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes (LAL).

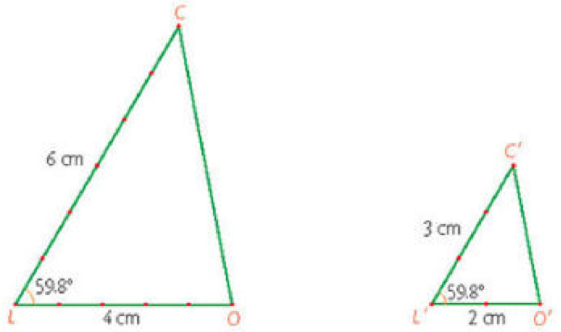


Figura 3.11

En este ejemplo, ¿cuál es la razón de semejanza? ____________ ¿Y cuál la razón inversa?

Los triángulos COL y C'O'L' son semejantes por tener dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos, congruente.

III. Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales (LLL).

$$\frac{9\text{ u}}{6\text{ u}} = \frac{12\text{ u}}{8\text{ u}} = \frac{15\text{ u}}{10\text{ u}}$$

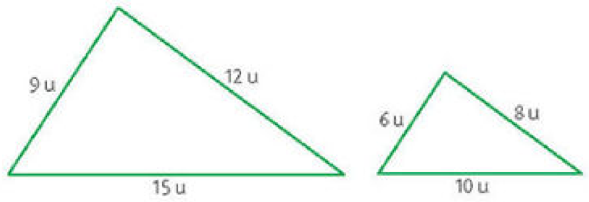


Figura 3.12

En este caso, solamente intervienen las medidas de los lados, pero, ¿cómo crees que serán las medidas de los ángulos en ambos triángulos?

¿Cuál es la razón de semejanza de los triángulos? ______________________

Un recurso muy valioso para la solución en triángulos semejantes es la regla de tres. Observa el ejemplo:

Figura 3.13

Observa bien cómo usar los lados homólogos y la proporcionalidad para formar las razones de la regla de tres:

$$\frac{1.25}{5.00} = \frac{3.00}{y} \qquad \frac{13.00}{x} = \frac{5.00}{1.25}$$

Ahora, para calcular el valor de y, multiplica 3.00×5.00, y el producto divídelo entre 1.25. ¿Cuál es el valor de y?

Para calcular el valor de x, multiplica 13.00×1.25, y el producto divídelo entre 5.00. ¿Cuál es el valor de x?

¿Cuál es la razón de semejanza de los triángulos?

Además de los tres casos de semejanza de triángulos, no debes olvidar que siempre:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°.

Analicen en grupo los casos de congruencia y los de semejanza de triángulos y, en caso de dudas, consulten a su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Para congruencia de triángulos.

- Cada uno dibuje un triángulo cualquiera.
- Después, y sin que su compañero vea el triángulo que trazaron, en un papel hagan la descripción exacta del triángulo dibujado, sin usar dibujos y con el mínimo de datos indispensables para su trazo.
- Pasen el mensaje a su compañero, para que construya un triángulo igual.
- Comparen los triángulos para ver si efectivamente son iguales.
- En caso de que no sean iguales, analicen en dónde estuvo el error y corríjanlo.
- Digan el caso de congruencia que se usó.

Para semejanza de triángulos.

- Cada uno dibuje un triángulo cualquiera.
- Después, y sin que su compañero vea el triángulo que trazaron hagan la descripción exacta del triángulo dibujado en un papel, pero sin usar dibujos en la descripción, con el mínimo de datos indispensables para su trazo y con la razón de semejanza con la que quieren que se reproduzca.
- Denle la descripción a su compañero para construya un triángulo semejante.
- Comparen los triángulos para ver si efectivamente tienen lados proporcionales y ángulos internos iguales.
- En caso de que no sean semejantes, analicen en dónde estuvo el error y corríjanlo.
- Digan el caso de semejanza que se usó.

Intercambien las descripciones con otros equipos y reproduzcan la que les toque.
Digan el caso de congruencia o semejanza que se usó.
Expongan su trabajo en el grupo y, en el caso de que falten datos, completen la descripción.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

A. A cierta hora del día, la sombra de un bastón que mide 0.54 m, y que está colocado perpendicularmente al suelo, proyecta una sombra de 0.18 m. Por otro lado, el monumento del Ángel de la Independencia proyecta una sombra de 17.3 m, medida desde el centro de la base. ¿Cuánto medirá la altura del monumento?

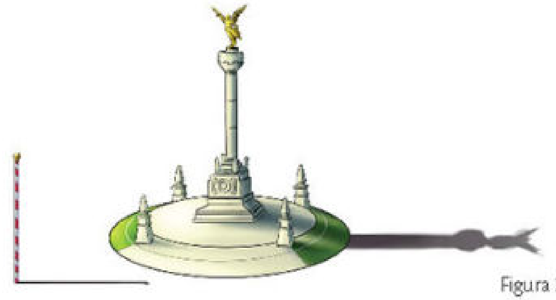


Figura 3.14

B. Redacta un mensaje para solicitarle a un compañero que elabore un triángulo congruente y uno semejante para cada uno de los siguientes triángulos.
Usa en cada caso alguno de los criterios de congruencia o semejanza de triángulos. Posteriormente, dale el mensaje a tu compañero para que lo interprete, trace lo solicitado y diga cuál criterio se usó en cada caso. Por último, comparen los triángulos resultantes con los originales.

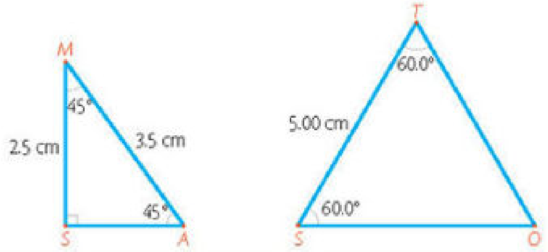


Figura 3.15

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) *(continuación)*

C. Escribe en tu cuaderno, por qué en el caso del criterio de semejanza, en el que se toma la igualdad de los tres ángulos, basta con que se cumpla con dos ángulos para que exista semejanza de triángulos.

D. Comprueba la transitividad de la congruencia de triángulos, trazando un $\triangle A$, después un $\triangle B$ congruente al $\triangle A$ y, finalmente, un $\triangle C$ congruente al $\triangle B$. Prueba que los triángulos $\triangle A$ y C son congruentes.

E. Comprueba la transitividad de la semejanza de triángulos, trazando un $\triangle A$, después un $\triangle B$ semejante al $\triangle A$ y, finalmente, un $\triangle C$ semejante al $\triangle B$. Prueba que los triángulos $\triangle A$ y C son semejantes.

F. Traza un triángulo que tenga dos lados de 4.5 cm cada uno y que sea la mitad de un cuadrado. ¿Cuál criterio de congruencia se usa en la descripción de este triángulo?

G. Trázale al rombo una de sus diagonales y comprueba, mediante los criterios de congruencia de triángulos, que queda dividido en dos triángulos congruentes.

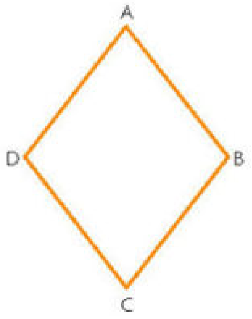


Figura 3.16

H. Traza y comprueba que los siguientes triángulos son únicos. Escribe el caso de congruencia que se usó en cada situación.

1. Triángulo que tenga un lado de 6.5 cm, y en sus extremos un ángulo de 50° y otro de 75°, respectivamente.
2. Triángulo cuyos lados midan 4.5 cm, 6 cm y 7.5 cm.
3. Triángulo que tenga un ángulo de 45° formado por dos segmentos de 5.5 cm cada uno.

Aplica las TIC

Si cuentan con una computadora y algún software de geometría, realicen en equipo la siguiente investigación.

A. Observen la ubicación de algunos de los comandos que se usarán.

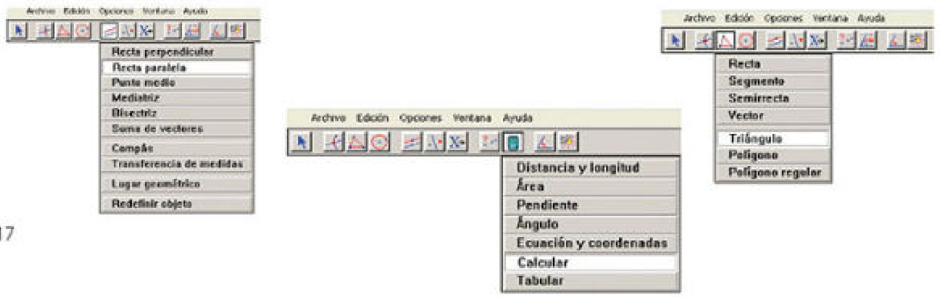


Figura 3.17

Aplica las TIC *(continuación)*

B. Traza un triángulo y llámale LUZ.
Configura la computadora para que te indique las medidas de los lados y de por lo menos dos ángulos. Te debe quedar como el de la figura 3.18.

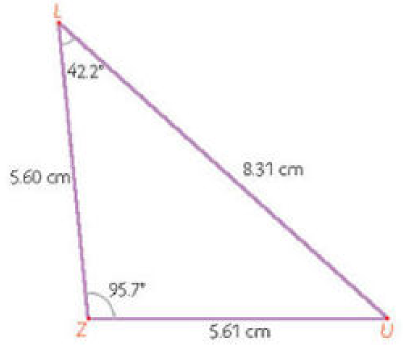


Figura 3.18

C. Marca para cada lado un punto exterior al triángulo y configura la computadora para que trace respectivamente una paralela a cada lado, por cada uno de los puntos:

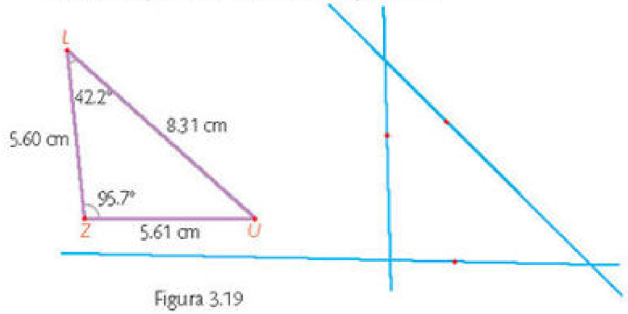


Figura 3.19

D. Marca los puntos de intersección de las rectas, llámales L'U'Z' como sus homólogos y traza un triángulo que pase por dichos puntos. Después oculta las rectas y configura la computadora para que muestre las medidas de los lados y de los ángulos homólogos del primer triángulo trazado.

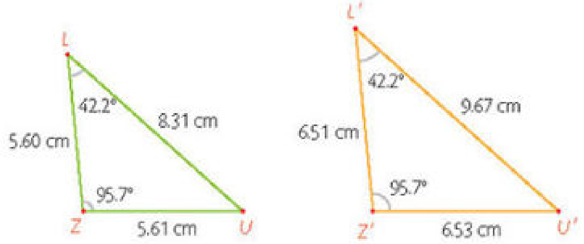


Figura 3.20

E. Configura la computadora para que calcule la razón entre los lados homólogos de los lados. Mueve los vértices del $\triangle LUZ$ o los puntos sobre los lados del $\triangle L'U'Z'$ y observa cómo se conservan congruentes los ángulos correspondientes y la proporcionalidad entre los lados.

$$\frac{LZ}{L'Z'} = 0.86 \qquad \frac{LU}{L'U'} = 0.86 \qquad \frac{ZU}{Z'U'} = 0.86$$

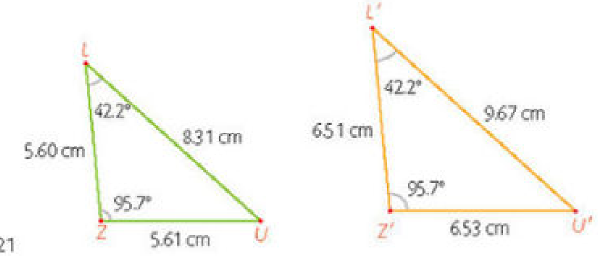


Figura 3.21

Aplica las TIC (*continuación*)

F. Finalmente, muevan los lados del $\triangle L'U'Z'$ hasta formar un triángulo congruente al $\triangle LUZ$. ¿Cómo son las razones resultantes? ____________________

¿Se puede afirmar que todos los triángulos congruentes son a la vez semejantes? ____________ ¿Por qué?

____

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Pueden descargar gratis un software de geometría, con su manual en español, en la siguiente liga: www.geogebra.org Fecha de consulta: 15 de octubre de 2016.

Lectura

La importancia del triángulo

Dado que el triángulo es una de las figuras básicas de la geometría y que tiene infinidad de aplicaciones y expresiones, tanto en la naturaleza como en las obras humanas, no es raro que los más grandes pensadores de la antigüedad se hayan dedicado a su estudio.

Euclides (aproximadamente 325-265 a.n.e.) se encargó de comprobar el teorema de Pitágoras, mediante una propuesta formulada de forma ligeramente distinta.

En los triángulos rectángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

De hecho, Tales de Mileto (639 o 624-547 o 546 a.n.e.), uno de los siete sabios de la antigüedad, ya había enunciado propiedades de los triángulos en este mismo sentido. Una de ellas, por ejemplo, sostiene que:

- Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.

Las aplicaciones de los triángulos son innumerables en la vida cotidiana. Por ejemplo:

- Triangulación de figuras irregulares para el cálculo de sus áreas.
- Triangulación de polígonos para rigidizarlos, es decir, para evitar que se deformen, como en la famosa Torre Eiffel en París (figura 3.22).
- Triangulación de polígonos para deducir la suma de sus ángulos interiores, entre otras muchas.

Figura 3.22

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la identificación y aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos. Comenten en grupo su resumen.

Lección 4

¿Qué prefieres, una tabla o una gráfica?

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación proporcional.

Para recordar

Sofía hace collares con distintos tipos de piedra. Hoy ha ido a surtirse con su proveedor, y su nota de compra se presenta a continuación en la figura 4.1.

Piedras y cristales finos Nota de compra			
Cantidad	**Concepto**	**Precio unitario**	**Importe**
3	Chip grande de piedra natural venturina morada 10-20 mm. Hilo/80 cm.	$56.00	
5	Piedra natural turquesa esfera 6 mm color morado. Hilo/72 cm.		$180.00
	Chip de piedra natural turquesa azul (triángulos). Hilo/80 cm.	$28.00	$280.00
	Total		

Figura 4.1

Completa los espacios vacíos, marcados con amarillo, que hay en la nota.

En esta situación hay una relación directa y proporcional entre dos cantidades. Explica por qué.

____

¿Cuáles son estas dos cantidades? ____________________

¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________________

Compara tus respuestas con tus compañeros y discútanlas en grupo.

RETO

Eloísa tiene 45 años y ha ido a su institución de salud para una revisión general. Como parte de esta revisión ha tenido una consulta con la nutrióloga, quien le ha dicho que debe llevar un régimen alimenticio especial para bajar de peso. Le ha explicado que tiene que bajar ocho kilogramos de forma gradual, de tal manera que si cada semana baja la misma cantidad, en poco tiempo perderá la cantidad de peso que es necesaria. La nutrióloga le muestra la siguiente gráfica:

Figura 4.2

De acuerdo con la gráfica, ¿cuánto peso debe perder Eloísa cada semana?, ¿en esta gráfica, disminuye la misma cantidad de peso cada semana?, ¿cómo lo puedes ver en la gráfica?, ¿en cuánto tiempo bajará los ocho kilogramos que necesita perder?

Pistas

Para contestar las preguntas del reto anterior, en parejas analicen lo siguiente:

Peso perdido en la semana 0: ____________
Peso perdido en la semana 1: ____________

$(Pp_1) - (Pp_0) =$ ____________

Peso perdido en la semana 1: ____________
Peso perdido en la semana 2: ____________

$(Pp_2) - (Pp_1) =$ ____________

Peso perdido en la semana 2: ____________
Peso perdido en la semana 3: ____________

$(Pp_3) - (Pp_2) =$ ____________

Peso perdido en la semana 3: ____________
Peso perdido en la semana 4: ____________

$(Pp_4) - (Pp_3) =$ ____________

¿Cómo es la diferencia de peso de una semana a otra?, ¿de cuánto es esta diferencia?

Con esta información, realiza el cálculo necesario para saber en cuánto tiempo se pierden ocho kilogramos.

En tu gráfica identifica el valor de ocho kilogramos perdidos y determina a qué semana corresponde, ¿en cuántos meses habrá bajado Eloísa el peso que necesita perder?

¿Corresponde la información que obtienes en la gráfica con el cálculo que hiciste?

Formalización

La situación que se presenta en el reto se representó a través de una gráfica. En ella están relacionadas dos cantidades, ¿cuáles son?

____________________ y ____________________

Esta misma información se puede representar a través de una tabla o de una expresión algebraica. Cualquiera de las tres representaciones debe dar la misma información de las cantidades que se relacionan.

Describe con palabras la información que te da la gráfica y el tipo de situación que representa (proporcional directa o inversa o no proporcional):

____

En la gráfica, ¿cómo identificas las cantidades que se relacionan?

____

La diferencia de peso de una semana a otra, ¿de cuánto es?, ¿cómo lo ves en la gráfica?, ¿qué representa en esta situación? ____________________

Si se quiere saber la cantidad de peso que se pierde en cuatro semanas, ¿cómo lo obtienes de la gráfica?

____

Si quieres saber en cuánto tiempo se pierden tres kilogramos, ¿cómo lo obtienes de la gráfica?

____

En parejas, discutan cuál de las siguientes tablas (4.1, 4.2, 4.3 y 4.4) representa la misma información que se da en la gráfica.

Tabla de pérdida de peso	
Semana	**Peso perdido (kilogramos)**
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
...	...
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20

Tabla 4.1

Tabla de pérdida de peso	
Semana	**Peso perdido (kilogramos)**
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
...	...
16	32
17	34
18	36
19	38
20	40

Tabla 4.2

Tabla de pérdida de peso	
Semana	**Peso perdido (kilogramos)**
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
5	2.5
6	3
7	3.5
8	4
...	...
16	8
17	8.5
18	9
19	9.5
20	10

Tabla 4.3

Expliquen por qué cada una de las tablas incorrectas no corresponde con la información de la gráfica.

Tabla de pérdida de peso	
Semana	Peso perdido (kilogramos)
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
5	2.5
6	3
7	3.5
8	4
...	...
16	8
17	8.5
18	9
19	9.5
20	10

Tabla 4.4

Contesten las siguientes preguntas a partir de la tabla 4.4: ¿Cuáles son las cantidades que se relacionan?

La diferencia de peso de una semana a otra, ¿de cuánto es?, ¿cómo lo ves en la tabla?, ¿qué representa en esta situación?

Si se quiere saber la cantidad de peso que se pierde en cuatro semanas, ¿cómo lo obtienes de la tabla?

Si quieres saber en cuánto tiempo se pierden tres kilogramos, ¿cómo lo obtienes de la tabla?

Ahora, en parejas, discutan cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa la misma información que se da en la gráfica:
Si representamos con x el número de semana, y con y, la cantidad de peso perdido, la expresión algebraica es:

Expresión 1 $y = x$

Expresión 2 $y = 2x$

Expresión 3 $y = \frac{2}{x}$

Expresión 4 $y = \frac{1}{2}x$

Expliquen por qué cada una de las expresiones incorrectas no corresponde con la información de la gráfica.
Contesten las siguientes preguntas a partir de la expresión algebraica:
La diferencia de peso de una semana a otra, ¿de cuánto es?, ¿cómo lo notas en la expresión algebraica?, ¿qué representa en esta situación?

Si se quiere saber la cantidad de peso que se pierde en cuatro semanas, ¿cómo lo obtienes de la expresión algebraica?

Si quieres saber en cuánto tiempo se pierden tres kilogramos, ¿cómo lo obtienes a partir de la expresión algebraica?

UN NUEVO RETO

En equipo, construyan para cada situación la tabla y la gráfica (en papel cuadriculado). Luego escriban la expresión algebraica. Por último, expliquen lo siguiente:

- Con palabras, qué situación se representa.
- Cuáles son las cantidades que están relacionadas.
- Si es una situación de proporcionalidad directa, inversa o no.

Situación 1

Cantidad de dólares	Cantidad de pesos mexicanos
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
6	72
7	84
8	96
9	108
10	120

Tabla 4.5

Situación 2
La velocidad a la que va un auto en km/h está representada por x y el tiempo que tarda en recorrer 600 kilómetros, por y.

$$y = \frac{600}{x}$$

Situación 3

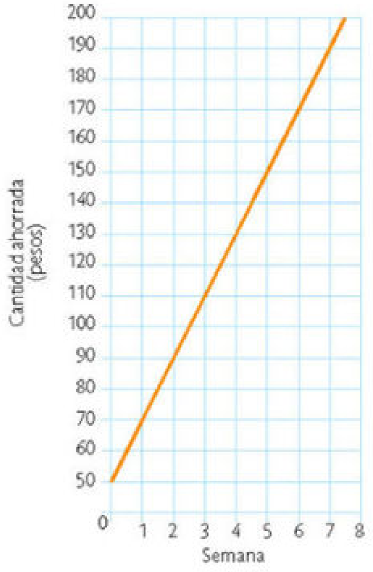


Figura 4.3

Situación 4

Si el kilogramo de tortillas cuesta 10 pesos, construye la tabla y la gráfica correspondientes. Luego escribe la expresión algebraica que represente el costo de cualquier cantidad de tortillas.

En grupo, discutan lo siguiente: de las cuatro situaciones anteriores, ¿qué tipo de proporcionalidad se presenta?, ¿qué similitudes encuentran en sus gráficas y expresiones algebraicas?

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. Con ayuda de tu computadora y de tu profesor construye la gráfica y la tabla en una hoja electrónica de cálculo, para saber el costo de 0 a 20 kilogramos de huevo. Escribe también la expresión algebraica para saber el costo de cualquier cantidad de kilogramos de cada una de las entidades que se presentan en la tabla 4.6. Observa las similitudes y diferencias que hay en cada gráfica y en cada expresión algebraica.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) *(continuación)*

Reporte semanal de huevo blanco en centrales de abasto de algunas entidades
Precios correspondientes al periodo del 17 al 21 de octubre de 2016

Centrales de Abasto	Costo del kilogramo de huevo blanco al mayoreo (pesos)
DF: Central de Abasto de Iztapalapa	17.50
GTO: Central de Abasto de León	17.50
JAL: Mercado de Abasto de Guadalajara	15.50
NAY: Mercado de Abasto de Tepic	18.00
NL: Central de Abasto de Guadalupe	16.00
SIN: Central de Abasto de Culiacán	17.00
TAMPS: Módulo de Abasto de Tampico, Madero y Altamira	17.50
YUC: Central de Abasto de Mérida	18.00

Tabla 4.6

FUENTE: Apoyos y Servicios a la Comercialización Agropecuaria (Aserca) con datos del Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados (SNIIM). Información adaptada de: http://www.infoaserca.gob.mx/avicolas/avc_huevo.asp Fecha de consulta: 20 de octubre de 2016

2. A partir de la información de la situación del reto inicial, donde Eloísa debe perder ocho kilogramos, construye la gráfica, la tabla y la expresión algebraica que representa el peso de Eloísa cada semana, si su peso al iniciar el tratamiento es de 70 kilogramos.

Lectura

La sociedad de la información y del conocimiento

A finales del siglo XX se comenzó a llamar a la sociedad que vivía los tiempos que se avecinaban con el nuevo milenio: Sociedad de la información y Sociedad del conocimiento. Una sociedad de la información es aquella en la que la información y el conocimiento tienen un lugar privilegiado en la sociedad y en la cultura. De esto se desprenden que la creación, distribución y manipulación de la información forman parte estructural de las actividades culturales y económicas. Sin embargo, la información no es lo mismo que el conocimiento. La información se compone de hechos y sucesos, mientras que el conocimiento se define como la interpretación de dichos hechos dentro de un contexto y, posiblemente, con alguna finalidad.

Las tablas y gráficas son una manera de presentar la información, por eso es relevante que desde la secundaria vayas adquiriendo el conocimiento para construirlas e interpretarlas.

Texto tomado y adaptado de: http://www.mexicoconectado.gob.mx/
Fecha de consulta: 15 de octubre de 2016.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto al análisis de representaciones gráficas, tabulares y algebraicas. Comenten en grupo su resumen.

Lección 5

En caída libre

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Para recordar

Plantea la ecuación que representa la siguiente situación y resuélvela con el procedimiento que puedas.

La suma de un número natural y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?

Discutan en equipo qué tipo de ecuación obtuvieron, y comparen sus procedimientos y resultados.

RETO

El *bungee jumping* o puentismo es un deporte extremo practicado por muchos aventureros, que consiste en saltar al vacío amarrado al cuerpo o a los tobillos del extremo de una cuerda elástica, y el otro extremo amarrado a un puente o plataforma, desde la cual se salta. Hace mucho tiempo, este deporte era una especie de prueba de valor por la cual los jóvenes de una aldea de la isla de Pentecostés, en Vanuatu (océano Pacífico del Sur), tenían que pasar para ser llamados adultos.

Figura 5.1. ***Bungee jumping***

Discute con tus compañeros desde qué altura crees que se lanzan las personas que practican este deporte extremo ¿20, 50, 100, 500, 1 000 metros?, ¿cuánto tiempo crees que dura el salto, 1, 20, 60 segundos? o ¿2, 5, 10 minutos?

Propón junto con tus compañeros una forma de saber el tiempo que dura el salto en *bungee*, desde diferentes alturas.

Pistas

El *bungee jumping* es un salto en caída libre, y este es un fenómeno que estudiaste en tu curso de ciencias, en segundo grado. Recuerda que la fórmula para conocer la distancia que recorre un cuerpo en caída libre es:

$$d = \frac{1}{2}gt^2$$

Donde d, representa la distancia que recorre el objeto; la g, el valor de la gravedad en m/s^2, y t, el tiempo, en segundos que tarda en recorrer el objeto dicha distancia.

Con esta información resuelve el reto. En equipo, calculen y discutan las distancias que se recorren en distintos tiempos e investiguen desde qué altura se suelen lanzar los deportistas que practican el *bungee*.

Formalización

La distancia recorrida en caída libre es un fenómeno que se representa con la fórmula $d = \frac{1}{2}gt^2$

¿Qué tipo de ecuación es? Discute con un compañero tus ideas.

Explica lo que te dice esta fórmula:

En esta lección abordaremos la representación tabular y algebraica de situaciones que se representan con ecuaciones de segundo grado.

Para representar la información en la tabla 5.1, consideremos que el valor de *g* es constante y corresponde a 9.8 m/s². Completa la tabla.

Tiempo (segundos)	Distancia (metros)

Tabla 5.1

Discute en equipo si no conocieran la fórmula de la caída libre y sólo tuvieran la tabla 5.1, ¿cómo podrían obtener la ecuación a partir de sus datos?

¿De qué distancias creen que se lanzan los que practican el ***bungee***? Discúntanlo en clase y compruébenlo investigando sobre este deporte extremo.

NUEVO RETO

En equipo, resuelvan el siguiente problema:

Juan organizó en su colonia un cine club; cada semana se proyecta una película. El área de la imagen sobre la pantalla depende de la distancia a la que se coloque el proyector. Juan lo coloca en distancias diferentes, de acuerdo con la cantidad de gente que acuda.

La tabla 5.2 muestra la relación entre la distancia (en metros) a la que se coloca el proyector con el área de la imagen (en cm²) en la pantalla:

Distancia del proyector (metros)	Área de la imagen (cm²)
1	300
2	1 200
3	2 700
4	4 800
5	7 500
x	

Tabla 5.2

- ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona la distancia a la que se coloca el proyector con el área de la imagen?
- Comparen con otros equipos la estrategia que siguieron para encontrar la expresión algébrica, a partir de la tabla de valores.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

1. Elabora la tabla de valores de las siguientes expresiones:

a. $2n^2$ c. $2n^2 + 3$ e. $-2n^2 - 3$

b. $-2n^2$ d. $-2n^2 + 3$ f. $2n^2 - 7n + 3$

2. Encuentra la expresión algebraica que relaciona las variables en cada una de las tablas 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6:

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
x	

Tabla 5.3

x	y
1	3
2	7
3	13
4	21
5	31
x	

Tabla 5.4

x	y
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
x	

Tabla 5.5

x	y
1	4
2	7
3	12
4	19
5	28
x	

Tabla 5.6

Aplica las TIC

Cuando un cuerpo está en movimiento posee energía cinética y si choca contra otro cuerpo, puede moverlo.

Este es un fenómeno que también estudiaste en tu curso de ciencias de segundo grado.

La fórmula que representa la energía cinética es la siguiente:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde *E* representa la energía cinética (en joules); *m*, la masa del cuerpo (en kilogramos) y *v*, la velocidad a la que se mueve el cuerpo (en m/s).

Con ayuda de tu profesor y de una hoja electrónica de cálculo, determina a qué velocidad una bolita de acero de 5 g de masa tiene la misma energía cinética que una de 2 000 g. Toma en cuenta las unidades en que debes poner cada una de las magnitudes involucradas, al hacer tu tabla de valores, como la que se muestra en la figura 5.2.

Aplica las TIC (*continuación*)

C26

	A	B	C	D
1	velocidad (m/s)	energía cinética de la bolita de 5 gramos (joules)	energía cinética de la bolita de 2 000 gramos (joules)	
2	1	0.0025	1	
3	2	0.01	4	
4	3	0.0225	9	
5	4	0.04	16	
6	5	0.0625	25	
7	6	0.09	36	
8	7	0.1225	49	
9	8	0.16	64	
10	9	0.2025	81	
11	10	0.25	100	
12	11	0.3025	121	
13	12	0.36	144	
14	13	0.4225	169	
15	14	0.49	196	
16	15	0.5625	225	
17	16	0.64	256	
18	17	0.7225	289	
19	18	0.81	324	
20	19	0.9025	361	
21	20	1	400	
22	21	1.1025	441	
23	22	1.21	484	
24	23	1.3225	529	
25	24	1.44	576	

Figura 5.2

- ¿Qué velocidad debe tener la bolita de 5 g y la de 2 000 g para tener 1 joule de energía? ¿Y para tener 5 joules de energía?
- Si ambas bolitas van a una velocidad de 100 m/s, ¿qué energía cinética tienen?

Compara con tus compañeros tus resultados y la forma en que escribieron las fórmulas en su hoja electrónica de cálculo para poder elaborar las tablas de valores de energía cinética

Lectura

Aristóteles y Galileo

La explicación del movimiento de los cuerpos fue cambiando en la historia junto con la forma de interpretar otros fenómenos del universo. Las ideas de Aristóteles determinaron durante siglos la forma de ver el mundo. A tal punto que, hasta mediados del siglo XVI, resultaba inaceptable pensar que la Tierra se movía y que el Sol no giraba a su alrededor. Copérnico, al afirmar su teoría heliocéntrica, refutó la concepción vigente, hasta ese momento, y dio lugar para que Galileo desarrollara sus ideas y otra manera de explicar cómo se mueven los cuerpos, independientemente de su naturaleza e incorporando el concepto de vacío y el de aceleración de la gravedad. Para Aristóteles existían dos tipos de movimientos: el movimiento natural y el movimiento violento. El movimiento natural podía ser hacia arriba o hacia abajo en la Tierra, en donde los cuerpos pesados (como una piedra) tendían naturalmente a ir hacia abajo, y los cuerpos livianos (como el humo) tendían naturalmente a ir hacia arriba. En el caso de un cuerpo que se mueva en caída libre con un movimiento rectilíneo, Aristóteles pensaba que los objetos pesados caían más rápido que los ligeros. Aunque cabe decir que la física de Aristóteles es de carácter intuitivo más que experimental. Fue Galileo quien rebatió esta teoría de Aristóteles al afirmar que, en el vacío todos los cuerpos, sin importar su masa, caen con la misma aceleración uniforme, lo que constituía un cambio de paradigma en el mundo de la física.

Información adaptada de http://www.cienciaredcreativa.org/informes/caida%202.pdf
Fecha de consulta: 15 de octubre de 2016.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática. Comenten en grupo su resumen.

Lección 6 ¿Y si le vas a varios números?

Tema: Nociones de probabilidad

Contenido: Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Para recordar

Contesta lo siguiente de manera individual

Entre los siguientes sucesos, ¿cuál consideras más probable?, ¿cuál el menos probable? Ordénalos de menor a mayor probabilidad.

- Que haya clase de matemáticas mañana.
- Que algún alumno o alumna gane el premio mayor del sorteo de Melate del próximo fin de semana.
- Que la suma de las edades de todos los alumnos del grupo sea menor de 20.

A continuación reúnan los datos de todo el grupo. Vean cuál fue el orden en que colocaron los sucesos anteriores. Traten de explicar las diferencias y comenten con su profesor.

RETO

Para otorgar premios en un concurso se utiliza una rueda como la siguiente:

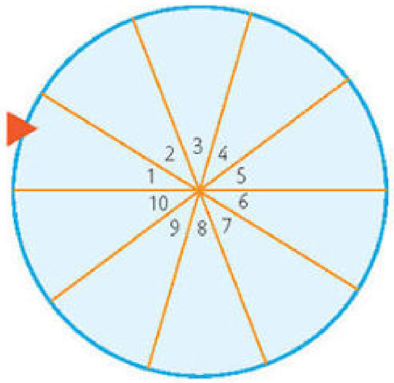


Figura 6.1

Al girar la rueda y detenerse por sí sola:

- ¿Cuáles son los resultados posibles? En caso de que la rueda se detenga entre dos números, se debe repetir el giro.
- ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en el número siete? ¿Cuál es la probabilidad de que al detenerse la rueda, se señale uno de sus números?

Obtén la probabilidad de que al detenerse la rueda, el número señalado sea:

- Un número mayor que seis.

- Un número menor que tres.
- ¿Cuál de los dos resultados anteriores es más probable?

Encuentra la probabilidad de que salga:

- Un número menor o igual que cuatro.
- Un número mayor o igual que cinco.
- ¿Cuál de los dos resultados anteriores es menos probable que salga?

- ¿Cuál es la probabilidad de que se observe el 12 al detenerse la rueda?
- ¿Hay algún resultado cuya probabilidad sea de $\frac{11}{10}$? Explica tu respuesta.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la rueda una vez, salga un número par? Al girarla una segunda vez, ¿cuál es la probabilidad de que salga nuevamente un número par? Explica tu respuesta.

Comparen y comenten sus resultados en el grupo, y cómo llegaron a ellos.

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden orientar para resolver el reto anterior.

- ¿En cuántas partes está dividida la rueda? Estas partes ¿son iguales o diferentes?
- Si consideras dos áreas o partes contiguas, ¿cuál es la probabilidad de que la rueda se detenga en una u otra de esas dos partes?
- ¿Qué tan posible consideras que la rueda se detenga en un número que no está en ninguna de sus áreas o partes?
- Después de haber girado la rueda y haber observado el número que resulte, y al girarla una segunda vez, ¿hay algo que cambie en la rueda, por ejemplo, los números escritos en ella, el tamaño o número de las partes en que se divide? De acuerdo con esto, ¿consideras que al girar la rueda en diferentes ocasiones, es posible que cambie la probabilidad de que salga un número u otro?

GLOSARIO

Espacio muestral. Es el conjunto o colección de todos los posibles resultados individuales o simples de un experimento aleatorio. Se pueden representar de diferentes maneras; se puede escribir una lista, se pueden presentar como el resultado de una tabla o de un diagrama de árbol, o por medio de la notación de conjuntos: A= {resultado individual 1, resultado individual 2,...}

Escala de probabilidad. Es el conjunto de valores que puede tomar la probabilidad de cualquier resultado o evento de una experiencia aleatoria. Está formado por todos los números reales entre el 0 y el 1; si A es cualquier evento y P(A) es su probabilidad, tenemos que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

y se representa gráficamente con el segmento numérico siguiente:

Formalización

Al realizar un experimento aleatorio, no podemos predecir lo que se va a observar ni lo que vamos a obtener como resultado. Sin embargo, para analizar el experimento empezamos por lo siguiente:

- Nombrar o hacer una lista o tabla de todos los resultados posibles.
- Estimar la probabilidad de que cada resultado ocurra por el procedimiento que sea más adecuado en cada caso.

¿Cuáles son los posibles resultados al girar la rueda en la sección Reto, y observar el número señalado cuando se detenga? Escríbelos todos: __________

Una lista de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se conoce como espacio muestral de ese experimento.

¿Cuál sería el espacio muestral de tirar un dado? __________

Para representar los diferentes valores de probabilidad de los resultados en un experimento aleatorio, se utiliza una escala de probabilidad; en ella, los extremos son los siguientes:

- La probabilidad de un resultado imposible, que corresponde a un suceso que no puede ocurrir en el experimento de que se trate.
- La probabilidad de un resultado cierto o seguro, lo que ocurrirá necesariamente.

En el experimento de tirar un dado que tenga los números del uno al seis ¿es posible que se observe el número siete? ¿Cuál sería la probabilidad de este resultado? __________

Si en el mismo experimento aleatorio consideramos en conjunto todos los números del dado, del uno al seis, ¿cuál es la probabilidad de que obtengamos alguno de estos números? ¿Consideras imposible, posible o seguro que salga un número entre el uno y el seis? ¿Por qué? __________

La escala de probabilidad se puede representar gráficamente utilizando una parte de una recta numérica, la cual comprende todos los valores entre cero y uno, incluyendo ambos extremos:

Figura 6.2

En un segmento como el anterior, se puede representar o señalar la ubicación de las probabilidades de diferentes resultados de un experimento. Por ejemplo, la probabilidad de obtener "águila" cuando lanzamos una moneda al aire, se ubica a la mitad de la escala de probabilidad, como se muestra a continuación en la figura 6.3:

Figura 6.3

Señala en la escala anterior (de manera aproximada), dónde se ubica la probabilidad de obtener el tres al tirar un dado. Marca también la probabilidad de obtener siete en el giro de la rueda, en el problema de la sección Reto. ¿Dónde se ubica este último (sobre la escala) con respecto al resultado de "águila" al lanzar la moneda? ¿Y con respecto a la probabilidad del tres en el tiro del dado? __________

Contesta lo siguiente, con base en los problemas y definiciones anteriores:

- ¿Qué valores consideras que puede tener la probabilidad de un resultado de un experimento aleatorio? __________
- ¿Por qué se utilizan solamente los valores entre cero y uno en la escala de probabilidad? __________

Comenta tus respuestas con tus compañeros y con tu profesor.

En una experiencia aleatoria, podemos estar interesados en un resultado en particular; pero también podemos enfocar nuestra atención en un grupo de resultados, como por ejemplo los números pares en el tiro de un dado, o al girar la rueda del concurso. Cuando combinamos uno o más resultados –para formar una colección o conjunto de ellos– se forma lo que llamamos un evento:

Un **evento** es cualquier colección de resultados del espacio muestral de un experimento aleatorio. Se representan generalmente con letras mayúsculas: A, B, C, etcétera. Cuando el espacio muestral no es muy numeroso, se puede representar un evento como:

$$A = \{a, b, c, \ldots\},$$

donde a, b, c son los resultados individuales que forman parte del evento A.

Un **evento simple** es un evento que consiste de un solo resultado del experimento.

El espacio muestral es un evento que contiene todos los resultados o eventos simples.

Al analizar el experimento del giro de la rueda se vieron varios eventos; uno de ellos es el formado por "números mayores que seis"; otro consta solamente del resultado "siete":

$$A = \{7, 8, 9, 10\}; \; B = \{7\}$$

Escribe otros tres eventos que se puedan formar con los resultados de ese experimento; asígnales las letras C, D y E: ____________________

____

Escribe el evento formado por el espacio muestral del mismo experimento; llámalo S: __________

____

Algunos de los eventos que se pueden formar con el espacio muestral de un experimento aleatorio, tienen características útiles y denominaciones particulares:

- Considera los siguientes eventos del experimento de girar una vez la rueda del concurso: F, números mayores que seis y G, números menores que tres; escríbelos mostrando los resultados individuales que incluyen, como se mostró arriba: ____________________

  ____
- ¿Qué características tienen estos conjuntos? Al girar una vez la rueda, ¿puede salir un número mayor que seis y menor que tres? ¿Tienen resultados individuales en común? __________
- Si vemos los eventos H: números menores o iguales que cuatro, y J: números mayores o iguales que cinco ¿Qué características tienen estos dos conjuntos? ¿Cómo se comparan con los dos anteriores?

  ____
- Comenta con tus compañeros y tu profesor tus observaciones sobre estos dos pares de eventos

Los eventos que no tienen ningún resultado simple o individual en común, no pueden ocurrir u observarse de manera simultánea; se conocen como **eventos mutuamente excluyentes**.

Si A es un evento, todos los resultados individuales del espacio muestral que no pertenecen a A, forman el **evento complementario** de A; este se escribe A^c; A y A^c son mutuamente excluyentes.

- Ahora analiza el último experimento descrito en la sección Reto, el cual consiste en girar la rueda y en observar el número en que se detiene dos veces seguidas. Si la primera vez se obtuvo un número par, ¿cuál será la probabilidad de que salga nuevamente un número par, la segunda vez que se gire la rueda?, ¿será la misma o será diferente a la probabilidad de la primera vez? Explica tu respuesta.

  ____
- Considera lo siguiente: al ir a girar la rueda por segunda vez, ¿hay algún cambio físico en ella, por ejemplo, en los números o las áreas o secciones en que se divide?, ¿cómo es el espacio muestral, es el mismo o ha cambiado? ____________________

  ____
- Comenta con tus compañeros y tu profesor tus observaciones sobre estos últimos eventos.

Se llaman **eventos independientes** a dos eventos tales que al ocurrir u observarse uno de ellos, la probabilidad de que ocurra el otro no se afecta o altera.

NUEVO RETO

Resuelvan en equipos el siguiente problema.

En la tienda de música El Súper Disco desean saber si los hombres y las mujeres tienen diferentes preferencias de compra al adquirir discos compactos (CD). Los CD que se venden en la tienda los clasifican en los siguientes tipos de música: clásica, rock, música en español, otros tipos de música.

Para conocer las preferencias de sus clientes, se seleccionará un cierto número de ellos. A cada uno se le preguntará qué tipo de música compró y, simultáneamente, se registrará si es hombre o mujer.

¿Cuáles son todos los resultados posibles de este experimento aleatorio? (recuerda que plantear una pregunta a una persona constituye un experimento aleatorio, ya que no se puede prever cuál va a ser su respuesta, y esta depende del azar).

Determina su espacio muestral. Puedes encontrarlo y representarlo usando un diagrama de árbol o una tabla o, simplemente, escribiendo una lista; utiliza las letras o símbolos que te resulten más convenientes. ____________________

____________________.

Escribe en tu cuaderno los siguientes eventos, señalando cuáles son los eventos o resultados simples que los forman:

- Cliente femenino.
- Compró música clásica.
- El evento complementario de "Compró música clásica".
- Cliente masculino y compró rock.

Define dos eventos que sean mutuamente excluyentes. ____________________

____

El resultado de preguntar a un cliente ¿puede afectar o modificar lo que el siguiente cliente responda? ¿La respuesta de un cliente será un evento independiente de lo que se observe con otro de ellos? Explica tu respuesta. ____________________

____

Compartan con otros equipos sus resultados y procedimientos; coméntenlos con su profesor.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

Al terminar de resolver cada uno de los siguientes problemas, comparen sus resultados y los procedimientos seguidos, y comenten con su profesor.

A. Utiliza la representación gráfica de la escala de probabilidad (ver las páginas 48 y 49 anteriores) para ubicar la probabilidad de los siguientes eventos:
- El cumpleaños del profesor de este año será un viernes.
- La Independencia de México se celebrará este año el día 10 de agosto.
- Al tirar un dado, obtendrás un número menor que cinco.

B. En una caja tenemos cinco canicas, dos negras y tres blancas, todas iguales excepto por su color. Vamos a realizar dos experimentos aleatorios:
- Experimento 1: se sacan dos canicas en sucesión y se observa su color; después de sacar la primera y anotar el resultado, esta canica se devuelve a la caja, luego, el contenido se revuelve antes de sacar la segunda.
- Experimento aleatorio 2: se sacan dos canicas en sucesión y se observa su color; a diferencia del caso anterior, la primera canica extraída no se devuelve a la caja.
- Para los dos experimentos, determina el espacio muestral, mostrando todos sus resultados simples.
- Determina si en cada uno de estos experimentos, el resultado de la segunda canica es independiente o no del resultado de extraer la primera canica. Explica tu respuesta.

C. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar familias que tienen tres hijos y observar el género de los mismos, según su orden de nacimiento. Representa el género de cada uno de los hijos con letras diferentes (por ejemplo, OAA significa que el hijo mayor es de género masculino y que tanto el segundo como el tercero son niñas).

a) ¿Cuántos y cuáles resultados posibles hay?

b) Si todos son igualmente probables, ubica en una escala la probabilidad de cualquiera de estos resultados.

c) Considera los siguientes pares de eventos. Determina los resultados que corresponden a cada evento y señala si son mutuamente excluyentes y si son o no complementarios; explica tu respuesta.
- evento 1: dos o más hijas; evento 2: hijo mayor niño.
- evento 3: más de dos niñas; evento 4: hijo mayor niño.

Define dos eventos que sean complementarios.

Lectura

Probabilidad de un evento

En segundo año, en la lección 16 del Bloque II, aprendiste dos procedimientos para determinar la probabilidad de un evento: el de probabilidad teórica y el de probabilidad frecuencial.

Existe un tercer enfoque: el de probabilidad subjetiva. En éste, se obtiene la probabilidad de un evento suponiendo o estimando su valor con base en alguna información y en la evaluación de una o varias personas y especialistas en el tema.

Se utiliza este enfoque cuando no es posible aplicar ninguno de los otros dos.

Por ejemplo, con base en observaciones recientes, un grupo de astrónomos ha estimado la probabilidad de que un asteroide choque con nuestro planeta y destruya nuestra civilización. Estiman que existen aproximadamente 700 000 asteroides que son lo suficientemente grandes y cercanos. Con alguna información sobre sus órbitas, consideran que la probabilidad subjetiva de una colisión de estas dimensiones durante los próximos 100 años es de aproximadamente 1/5 000.

Fuente: Triola, M. F. *Estadística*. México: Pearson, 2006.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la escala de la probabilidad. Comenten en grupo su resumen.

Lección 7

Para contestar una pregunta

Tema: Análisis y representación de datos

Contenido: Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Para recordar

Lleven a cabo la siguiente actividad por equipos:
- Pregunta a diez compañeros del salón si acostumbran tomar café o no.
- Elabora en un cuaderno una gráfica para presentar las respuestas obtenidas.
- Comparen en el grupo lo que hicieron y los resultados obtenidos, y comenten al respecto.

RETO

Por equipos planifiquen y efectúen las actividades necesarias para contestar lo siguiente:
- ¿Cuáles son las redes sociales de internet preferidas por los estudiantes de la escuela?

En cada equipo, determinen qué información se necesita, cómo y cuándo recabarla; prevean qué van a hacer con ella, cómo la van a organizar, presentar y analizar.

A continuación realicen lo que han planeado. Presenten sus datos, análisis y conclusiones a sus compañeros. Comparen y comenten entre ustedes y con su profesor.

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden ser útiles al resolver el reto anterior.
- ¿Cuáles son las personas o cosas para las cuales se va a realizar el estudio? ¿A quiénes se les va a solicitar información?
- Para recabar datos ¿vas a preguntar a todas y cada una de las personas o sólo a una parte de ellas?
- Existen diferentes maneras de organizar y presentar la información, ¿recuerdas cuáles tipos de gráficas y de tablas hemos estudiado?

Formalización

Cuando hay que resolver un problema de cierta complejidad (tanto en la escuela como en la comunidad, en el país o incluso internacionalmente) en términos generales, se llevan a cabo las siguientes etapas:
- Obtener datos sobre el tema.
- Organizar los datos y describirlos, utilizando tablas y gráficas.
- Obtener medidas de tendencia central de los datos, así como otras cantidades que los caractericen cuando sea necesario.
- Presentar y comunicar la información, su análisis y las conclusiones; lo que nos aporta la información recabada, en relación con el problema original que nos interesa resolver.

GLOSARIO

Encuesta. Un estudio que consiste en obtener información para contestar una o varias preguntas; para ello se pregunta a personas o instituciones, por medio de cuestionarios o entrevistas, o se mide u observan objetos.

Población. Conjunto o colección de todos los elementos (personas u objetos) que se van a estudiar, con respecto a los cuales se va a obtener información.

Muestra. Parte de los elementos de una población, que se selecciona para obtener de ellos la información necesaria para realizar una encuesta. Cuando se obtiene información sobre toda la población, se está realizando un censo.

Muestreo aleatorio simple. Se selecciona de una población de manera que se asegure que cualquier muestra diferente, del tamaño deseado, tenga la misma oportunidad de ser escogida.

Los problemas, por lo general, se presentan en forma de una o varias preguntas, como en la situación del reto.

Para obtener los datos necesarios:

- Es posible que ya exista información que haya sido recabada por otras personas o instituciones; en estos casos, se toman los datos que necesitamos, se organizan y describen de acuerdo con nuestro problema, y se presentan resultados y conclusiones.
- Cuando no existe información o ésta es insuficiente, es necesario recopilar nosotros mismos la información, para luego organizarla y presentarla.

Cuando obtenemos información para contestar una o varias preguntas, y para ello preguntamos a personas o instituciones, por medio de cuestionarios o entrevistas, o por observación directa, estamos realizando lo que se conoce como una encuesta. En esta lección nos enfocaremos principalmente a este tipo de estudio.

El primer paso en una encuesta es tener claro a qué conjunto de personas u objetos se va a estudiar, y para los cuales va a ser aplicable la respuesta o solución que encontremos en el estudio. En el caso de la pregunta del reto ¿a quiénes se va a solicitar la información?:

A las redes sociales, a tus compañeros o a personas en tu comunidad: ______________

Si se trata de alumnos, ¿son los de tercero, todos los de tu escuela, o los de todas las secundarias de la ciudad? ______________

Explica tu respuesta: ______________

Con frecuencia se escogen sólo unos elementos o una parte de la población para obtener de ella la información necesaria. A este conjunto se le conoce como muestra. Cuando se obtiene información sobre toda la población, se está realizando un censo.

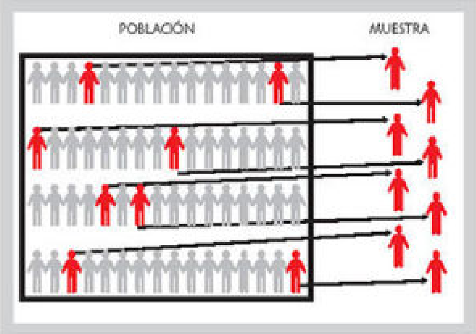


Figura 7.1

Una de las razones para seleccionar una muestra, es que en ocasiones las mediciones u observaciones que se realizan son destructivas, por ejemplo, para medir el contenido de azúcar de una cosecha de naranjas, no tiene sentido utilizar todas las naranjas. Pero la razón más usual es la limitación de recursos, ya que el tiempo o el dinero disponible no permiten observar la totalidad de la población.

Si se va a utilizar una muestra, el resultado que se obtenga debe poder generalizarse a toda la población. Por ello, es importante que dicha muestra sea representativa, es decir, que sea típica, que presente las mismas características de toda la población en conjunto.

Existen varias formas de seleccionar una muestra que pueda representar a toda la población; pero la más sencilla y comúnmente usada es el muestreo aleatorio simple. Con este procedimiento de selección, se obtiene generalmente una muestra que es representativa de la población, es decir, que comparte con ella las mismas características.

Realiza el siguiente procedimiento para lograr lo anterior:

- Escribir el nombre o número de cada miembro de la población en trozos de papel idénticos.
- Mezclar muy bien los papelitos.
- Seleccionar los papelitos necesarios, uno por uno.

Otro método consiste en elaborar una lista de todos los individuos o elementos en la población, y asignar un número consecutivo a cada uno de ellos; después generar números al azar (por medio de una hoja electrónica de cálculo o una calculadora) para ir escogiendo los elementos que formarán parte de la muestra.

También hay procedimientos donde no se asegura la aleatoriedad de la selección, y que, por lo tanto, no producen muestras que representen al total de la población. Esto se conoce como muestreo por conveniencia.

GLOSARIO

Muestreo por conveniencia
Este tipo de muestreo se caracteriza por seleccionar a personas cercanas (familiares, amigos o vecinos, por ejemplo), así como los casos en que las personas se ofrecen como voluntarios a participar o deciden por sí mismos si contestan o no (cuando se invita de manera abierta a llamar a un teléfono determinado o contestar por internet).

Con respecto al tamaño de la muestra, éste no debe ser muy pequeño, pero obviamente no conviene (ni tiene que ser) demasiado grande. Para las actividades de esta lección, un tamaño adecuado de las muestras puede ser de entre 3 y 10% del total de elementos de la población.

Para organizar, analizar y presentar los datos, será necesario elaborar tablas de frecuencias absolutas o relativas, así como gráficas circulares o de barras, o polígonos de frecuencias. También es necesario calcular alguna medida de tendencia central. Consulta tus materiales de los grados anteriores.

Finalmente, es necesario incluir como parte de los resultados, algún juicio, comentarios y recomendaciones por parte de los encargados del estudio, acerca del problema, por ejemplo, sobre sus características más relevantes y las posibles soluciones.

Explica cómo decidieron obtener su información en tu equipo, por medio de un censo o de una muestra; si fue una muestra, por qué se decidieron por esta opción, en qué se basaron, cuál fue su razonamiento; también explica cuál fue el procedimiento que siguieron para seleccionar la muestra: ______________

Expliquen a otros equipos sus argumentos para elegir las herramientas de presentación que usaron: ______________

Comparen entre equipos y comenten con su profesor.

UN NUEVO RETO

En equipos, discutan y realicen las actividades necesarias para contestar la siguiente pregunta:

- ¿En qué consisten los desayunos de los alumnos de tercero de la escuela, antes de empezar sus clases diariamente?
- ¿Cuál es la población? Explica. ______________

En este caso, puede ser importante conocer en qué consiste un desayuno nutritivo, a fin de contar con información más amplia, y no solamente preguntar quién desayuna y quién no.

Para sus análisis y conclusiones, los equipos podrían tomar en cuenta lo siguiente: ¿qué relación crees que pueda tener la proporción de alumnos con desayuno adecuado en las actividades y el trabajo en la escuela, y con el peso y la salud de los alumnos en general?

Después de recabar la información de acuerdo con lo que han planeado, presenten a sus compañeros los datos, análisis y conclusiones. Comparen y comenten entre ustedes y con su profesor, tanto los procedimientos como los resultados.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

Resuelvan los siguientes problemas por equipos.

1. ¿Cómo es la afición a los juegos de video entre los alumnos de tu escuela? Busquen información sobre el tema, por ejemplo, sobre los principales juegos disponibles para diferentes plataformas o aparatos. Después realicen los pasos necesarios (obtener datos, organizarlos y describirlos, presentar información y resultados) para contestar una o varias de las siguientes preguntas:
   a. ¿Cuáles son los juegos favoritos de los alumnos de tercero en tu escuela?
   b. ¿En dónde juegan?
   c. ¿Qué tan seguido juegan o cuánto tiempo le dedican a los juegos de video?
   d. ¿Con quiénes juegan?
   e. ¿Consideran que participar en juegos de video afecta sus actividades escolares u otro tipo de actividades?

2. Para este ejercicio, no es necesario definir una población ni una muestra; solamente se requiere obtener los datos de una fuente confiable, organizarlos utilizando alguno de los medios que conozcan (tablas, gráficas, medidas de tendencia central) analizarlos y presentar conclusiones. La pregunta es la siguiente:
   ¿Cuál fue el comportamiento del peso frente al dólar, cada día durante el último mes?

   Algunas de las cuestiones que se pueden tomar en cuenta para planear y efectuar el estudio, son:
   - ¿Cuál es la variable o característica más importante en la relación entre estas dos monedas?
   - ¿Con cuál dólar vamos a trabajar?
   - ¿Qué relación puede tener esta información con otras variables económicas del país?

Al terminar los ejercicios anteriores, comparen los resultados y procesos que siguieron los equipos, y comenten con su profesor.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto al diseño de una encuesta o un experimento. Comenten en grupo su resumen.

Lectura

Las elecciones y las encuestas

En México cada tres años elegimos diputados y presidentes municipales, y cada seis años al gobernador de la entidad donde vivimos, a los senadores y al presidente de la República.

Como parte de las actividades electorales, se llevan a cabo diferentes tipos de encuestas. Unas de ellas son las conocidas encuestas de salida. En estas, se selecciona una muestra de casillas electorales, y en cada una de ellas sólo a una proporción de los que ahí votaron. A los votantes elegidos, al ir saliendo de la casilla se les pregunta por qué candidato votaron.

Cada encuestador va reuniendo datos durante la jornada electoral, y al cerrar la casilla los envía inmediatamente por vía electrónica, de manera que en cuestión de minutos se pueden procesar y analizar los datos de toda la muestra, y así obtener una aproximación de cómo ha votado todo el electorado de un estado o de todo el país.

Evaluación Bloque I

Evalúa lo que aprendiste en el Bloque I, resolviendo los siguientes problemas.

Conociendo las cuadráticas

1. Se está construyendo una piscina que tiene la forma de un prisma cuadrangular. Se pretende que tenga una capacidad de 300 m^3 con una profundidad de 3 m.
   ¿Cuáles son las otras dimensiones de la piscina?

   (A) 3 m de ancho y 5 m de largo.
   (B) 7 m de ancho y 7 m de largo.
   (C) 10 m de ancho y 10 m de largo.
   (D) 30 m de ancho y 25 m de largo.

2. Si en lugar de ser un prisma cuadrangular es rectangular, donde la medida del largo de la base es el doble que el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la base de la piscina?

   (A) $\sqrt{50}$ m de ancho y $2\sqrt{50}$ m de largo.
   (B) $2\sqrt{50}$ m de ancho y $\sqrt{50}$ m de largo.
   (C) $\sqrt{200}$ m de ancho y $2\sqrt{200}$ m de largo.
   (D) $2\sqrt{200}$ m de ancho y $\sqrt{200}$ m de largo.

   En ambos casos escribe la ecuación que te ayude a encontrar las medidas de la piscina.

Entre gráficas y tablas

3. En el año 2005, Bárbara Blackburn fue la digitadora más rápida del mundo según el libro Guinness de los récords.[1] Usando un teclado Dvorak, logró escribir de 150 palabras por minuto (ppm).

   ¿Cuántas palabras escribe en 15 min?, ¿y en media hora? y ¿en una hora?

   (A) Si la velocidad a la que escribe Bárbara se mantiene constante, escribe la expresión que representa la cantidad de palabras que escribe en cualquier cantidad de tiempo.
   (B) Elabora una tabla que proporcione información sobre las palabras que escribe Bárbara en una hora, pero cada 10 minutos.
   (C) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la información que da la tabla?

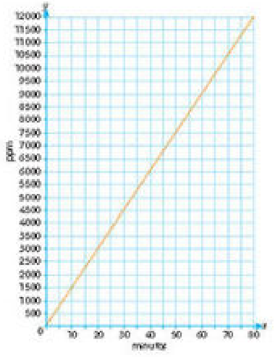


Figura EI.1

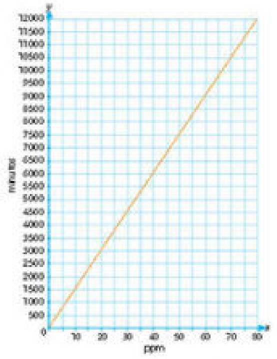


Figura EI.2

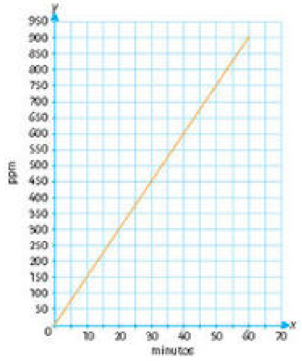


Figura EI.3

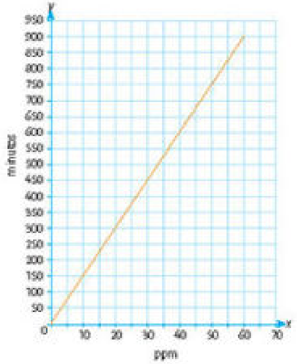


Figura EI.4

[1] Información tomada de http://es.wikipedia.org/wiki/Palabras_por_minuto Fecha de consulta: 15 de octubre de 2016.

4. A partir de la tabla EI.1 de datos, encuentra la expresión algebraica con la que se obtiene la misma información y la gráfica que la representa.

x	y
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50
x	

Tabla EI.1

Congruentes o semejantes

5. Se desea construir un rectángulo semejante al ABCD, si el lado AD que medía 5 cm ahora mide 7 cm, ¿qué operación se hace para calcular la medida del lado A'B'?

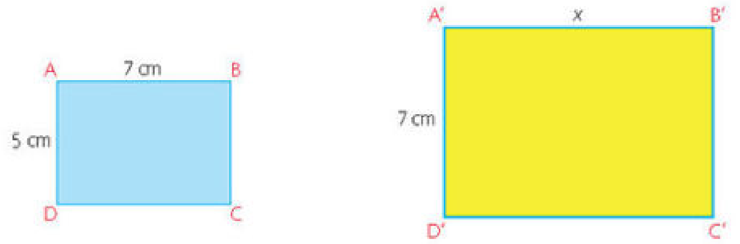


Figura EI.5

(A) Sumar 2 a 7 cm
(B) Multiplicar $\frac{7}{5}$ a 7 cm
(C) Multiplicar $\frac{5}{7}$ a 7 cm
(D) Multiplicar 5 a 7 cm

6. En tu cuaderno, traza dos figuras: un cuadrado y un triángulo que tenga un lado de 5 cm, otro de 7 cm y entre ellos un ángulo de 50°. Si comparas tus figuras con las de tus compañeros:
¿Los cuadrados serán congruentes o semejantes? ____
¿Por qué? ____

Los triángulos serán congruentes o semejantes ____ ¿En cuál criterio de semejanza o congruencia basas tu respuesta? ____

¿Por qué? ____

¿Si triplicas los lados de 5 y 7 cm y mantienes el mismo ángulo, el triángulo resultante cómo será comparado con el que trazaste originalmente? ____
Justifica tu respuesta: ____

¿Si divides solamente uno de los lados de 5 y 7 cm y mantienes el mismo ángulo, el triángulo resultante cómo será comparado con el que trazaste originalmente? ____ Justifica tu respuesta: ____

¿Podrás trazar 2 cuadrados que no sean semejantes ni congruentes? ____ ¿Por qué? ____

Si x, y, z representan las longitudes de los lados de un triángulo, encierra la opción que representa un triángulo semejante al original:

(A) xx, yy, zz (B) $2x, 2y, 2z$ (C) $x, 2y, 3z$ (D) $x/x, y/y, z/z$

Hay que saber distinguir

7. Se tiran dos monedas diferentes. Considera los siguientes pares de eventos:

1	A: al menos una águila	B: dos soles
2	C: dos águilas	D: dos soles
3	E: águila en la primera moneda	F: sol en la segunda moneda
4	G: dos águilas	H: al menos una águila

Tabla EI.2

Señala cuál de estos pares de eventos es:
Complementario:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Mutuamente excluyente (solamente; no complementario):

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

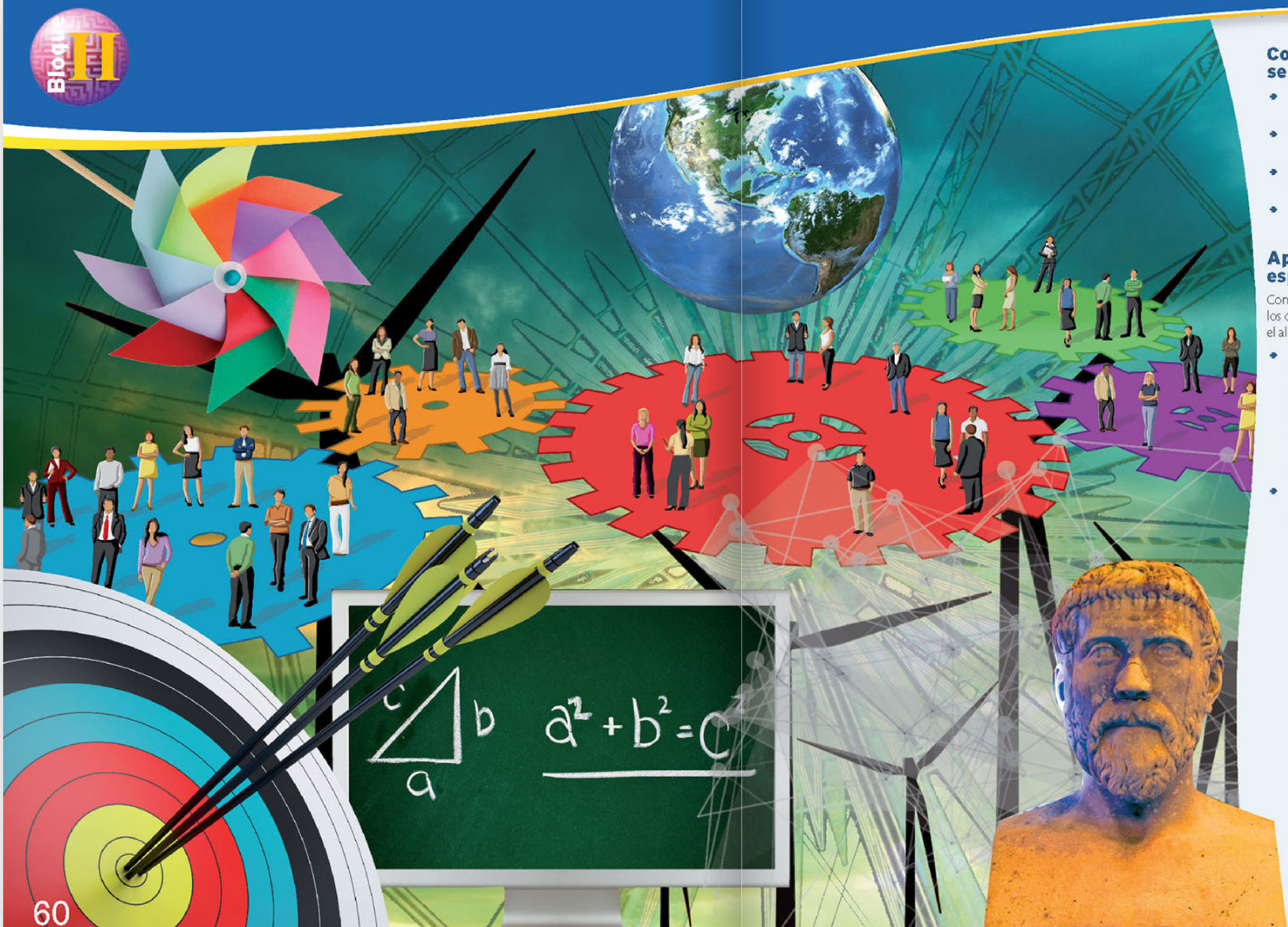
Independiente:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

¿A quién te refieres?

8. El director de la escuela necesita saber cuál es el peso promedio de los alumnos de tu escuela. Describe brevemente:
¿Cómo seleccionar una muestra? ____

¿Cuáles son los resultados posibles de las observaciones? ____



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de los contenidos de este bloque, el alumno:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Lección 8 ¿Cuántos eran?

Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Para recordar

En parejas, planteen la ecuación que resuelve el siguiente problema y encuentren su solución:

La suma del cuadrado de dos números impares consecutivos es 514, ¿cuáles son esos números?

Discute con tu compañero cómo escribir un número impar y su consecutivo para poder plantear la ecuación.

Comparen su ecuación con otras parejas y sus resultados.

RETO

Juan vio que un videojuego nuevo estaba a la venta en una tienda de electrónica. Al ver el precio de $900, comprendió inmediatamente que necesitaría juntarse con algunos de sus amigos para poder pagarlo. Así, Juan invitó a algunos amigos y los llevó a la tienda.

Al llegar a la tienda, Pedro, uno de los amigos de Juan, calculó cuánto tendría que pagar cada uno y se los hizo saber. Algunos de ellos expresaron que no podrían pagar esa cantidad de dinero; a uno le faltaban $25, a otro $27, la cosa es que entre todos no completaban los $900.

Pedro, siempre hábil en eso de hacer cuentas, después de hacer algunos cálculos en un pedazo de papel, resolvió que les faltaba un amigo más para que cada uno tuviera que pagar exactamente $30 menos. Así que deciden invitar a su amigo Ricardo a unirse con ellos, quien alegremente acepta, y compran el videojuego.

¿Cuántos socios eran inicialmente? ____________________

¿Cómo lo sabes? ____________________

Pistas

Para ayudarte a resolver el problema contesta las siguientes preguntas:

- Si representamos con x el número de socios que en un principio iban a comprar el videojuego, ¿cuál es la expresión que representa el número de socios que finalmente lo comprarán?
____
____
- ¿Cuál es la expresión que representa la aportación que inicialmente iban a dar Juan y sus socios, antes de invitar a Ricardo? ____________________
- ¿Cuál es la expresión que representa la aportación que le corresponde a cada uno, tomando en cuenta el número de socios después de invitar a Ricardo?

Escribe la ecuación que indique la diferencia entre las dos expresiones anteriores.
____
____

Pistas (*continuación*)

Compara con otros compañeros la ecuación que escribiste y expliquen con palabras lo que representa esa ecuación.

Para ayudarte a resolver la ecuación, y saber el número de amigos que inicialmente iban a comprar el videojuego, en tu cuaderno copia la tabla siguiente y llénala.

Número de amigos iniciales	Número de amigos totales	Aportación inicial	Aportación final	Reducción de la aportación
x	$x+1$	$\frac{900}{x}$	$\frac{900}{x+1}$	$\frac{900}{x}-\frac{900}{x+1}$
2	3	450	300	150

Tabla 8.1

Recuerda las condiciones del problema para que puedas encontrar la solución.

¿Cuántos amigos iban a comprar el videojuego originalmente? ____________________

Formalización

Las ecuaciones cuadráticas tienen la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hasta el momento has usado procedimientos propios para resolver ecuaciones de segundo grado. Uno de los métodos para resolver este tipo de ecuaciones es *por descomposición de factores*, que tiene que ver con los métodos de factorización, en particular con el *producto de dos binomios con un término común*.

GLOSARIO

Binomio. Es una expresión algebraica formada ya sea por la suma o la diferencia de dos términos, por ejemplo: $x + a$ o $x - a$.

El producto de dos binomios con un término común puede ayudarte a resolver ecuaciones cuadráticas. Recuerda que:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Es igual al cuadrado del término común más la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes.

Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x^2 + (a + b)x + ab$$

Se requiere encontrar dos números (a y b) tales que su suma sea $\mathbf{a + b = 3}$ y su producto sea $\mathbf{ab = -10}$.

Por inspección, se encuentra que estos números son **5 y −2**.

Por tanto, el primer miembro de la ecuación se puede factorizar como:

$$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$$

La igualdad $(x - 2)(x + 5) = 0$ se cumple cuando $x - 2 = 0$ o cuando $x + 5 = 0$
En el primer caso, se tiene la solución:

$$x_1 = 2$$

En el segundo caso, se tiene la solución:

$$x_2 = -5$$

- Analizando el procedimiento anterior, en parejas, traten de describir las condiciones que deben cumplir los números *a* y *b* para poder factorizar la ecuación.
- Discute con tus compañeros si las dos soluciones de la ecuación son también dos soluciones diferentes para el problema. Explica ¿por qué?

UN NUEVO RETO

Roberto ha encontrado en un libro de texto las siguientes dos ecuaciones:

$$4x^2 + 24x + 20 = 0$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Y observa que las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones.

En equipo, discutan si es posible que ambas ecuaciones tengan las mismas soluciones y cuál es la explicación de esto.

Traten de resolver ambas ecuaciones por separado, para ver si obtienen los mismos valores. ¿Pueden resolverlas con el mismo procedimiento?

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 + 7x + 10 = 0$

b. $x^2 - 5x + 6 = 0$

c. $x^2 + x - 2 = 0$

d. $x^2 - 9x + 20 = 20$

e. $x^2 - 12x + 11 = 0$

f. $x^2 - 7x - 30 = 0$

g. $x^2 + 6x - 16 = 0$

h. $x^2 - 12x + 36 = 0$

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

2. Resuelve el siguiente problema:
El perímetro de un rectángulo mide 80 cm, ¿cuáles son algunas de las medidas posibles de su lados?

Figura 8.1

3. Para plantear una ecuación que resuelva el problema, contesta las siguientes preguntas:
   a. ¿El largo del rectángulo puede medir 40 cm? ¿Por qué? ____________________
   b. Si el largo del rectángulo mide *a*, ¿cuánto mide el ancho? Escribe la expresión algebraica que represente el valor del ancho del rectángulo. ____________________
   c. Escribe ahora las expresiones que representen el perímetro y el área del rectángulo.
   - Perímetro: ____________________
   - Área: ____________________
   d. Si el área del rectángulo mide 351 cm^2, ¿cuáles son sus dimensiones? Escribe la ecuación que representa esta situación y llévala a su forma general para que puedas resolverla en tu cuaderno por el método de factorización.

Aplica las TIC

1. Con ayuda de una hoja electrónica de cálculo como la que se muestra en la figura 8.2, resuelve el siguiente problema:
   a. Si se tiene un rectángulo cuyo perímetro es de 120 cm, y su área es de 851 cm^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

	A	B	C	D
1	largo	ancho	perímetro	área
2	1	59	120	59
3	2	58	120	116
4	3	57	120	171
5	4	56	120	224
6	5	55	120	275
7	6	54	120	324
8	7	53	120	371
9	8	52	120	416
10	9	51	120	459
11	10	50	120	500
12	11	49	120	539
13	12	48	120	576
14	13	47	120	611
15	14	46	120	644
16	15	45	120	675

Figura 8.2

   b. Escribe en B1, C1 y D1 las fórmulas correspondientes para el ancho, perímetro y área del rectángulo.
   c. Escribe ahora la ecuación de segundo grado en tu cuaderno, donde representes con *x* el valor del largo.

Aplica las TIC (*continuación*)

Resuelve la ecuación por factorización. Verifica que el valor que obtienes coincida con los datos de la tabla que elaboraste.

d. ¿Cuáles son las soluciones del problema?

e. Ahora puedes plantear muchos problemas con ayuda de esta tabla. Plantea por lo menos cinco problemas más.

f. En equipo, cada quien genere una tabla diferente, escogiendo el perímetro que desee.

g. Cada quien planteará un problema al equipo, para que éste lo resuelva por factorización.

Lectura

Olimpiada Internacional Matemática

La Olimpiada Internacional de Matemática (OIM) es la competencia mundial para estudiantes de secundaria, y se desarrolla anualmente en un país distinto. Rumania organizó la primera OIM, en 1959, con sólo siete países. Actualmente, alrededor de 100 países de los cinco continentes participan en la olimpiada, y México es uno de ellos. Los equipos están conformados por un máximo de seis estudiantes junto con un líder de equipo, un tutor (o colíder) y observadores, estos últimos garantizan el buen funcionamiento del concurso. La competencia consiste en resolver dos cuestionarios con tres problemas cada uno, que da un máximo de siete puntos para un total de 42. La competencia se desarrolla en dos días, cada día el concursante dispone de cuatro horas y media para resolver cada cuestionario. Los problemas se escogen de varias áreas de la matemática vistas en secundaria, y pueden clasificarse, *grosso modo*, en geometría, teoría de números, álgebra y combinatoria. No se requieren conocimientos de altas matemáticas y las soluciones se espera que sean cortas. Encontrar las soluciones requiere ingenio excepcional y habilidad matemática. Lo que aprendes en tu curso de matemáticas de secundaria te va preparando para este tipo de competencias, en caso de que participes en ellas.

Información adaptada de http://www.imo-official.org/?language=es
Fecha de consulta: 15 de octubre de 2016.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro; con respecto al uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización. Comenten en grupo su resumen.

Lección 9

Gira o avanza

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

Para recordar

En parejas, tracen un triángulo simétrico al ΔHAT con respecto a la recta *m*, y llámenle H'A'T', después tracen un triángulo simétrico al ΔH'A'T' con respecto a la recta *n*, y llámenle H"A"T".

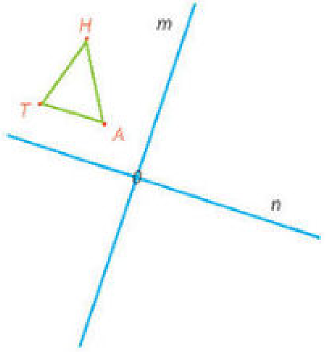


Figura 9.1

Comenten cómo mover de tal forma al ΔHAT para que sea simétrico al ΔH"A"T".

Comenten en el grupo cómo resolvieron el problema y, en caso de dudas, pregunten a otros compañeros.

RETO

En parejas, resuelvan lo siguiente:

Isaac y Carmen quieren saber si los siguientes pares de figuras experimentaron una rotación o una traslación. Ayúdenles a decidir.

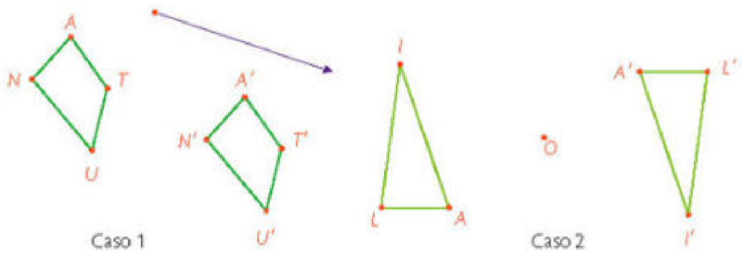


Figura 9.2

Caso 1

¿Se realizó una traslación o una rotación del cuadrilátero ATUN? ____________________

¿Por qué? ____________________

¿De cuánto es la medida del movimiento realizado? ____________________

¿Cómo lo saben? ____________________

¿Qué significa la flecha que aparece sobre los cuadriláteros? ____________________

¿En qué posición están los lados homólogos de los cuadriláteros? ____________________

¿Cómo son las medidas de los ángulos y de los lados del cuadrilátero original, comparado con su homólogo? ____________________

¿Ambos cuadriláteros son iguales en forma y tamaño? ____________________

Con las respuestas anteriores hagan un resumen. ____________________

Caso 2

¿Se realizó una traslación o una rotación del triángulo LIA? ____________________

¿Por qué? ____________________

¿De cuánto es la medida del movimiento realizado? ____________________

¿Cómo lo saben? ____________________

¿Qué función tiene el punto O? ____________________

¿Cómo son las medidas de los ángulos y de los lados del triángulo original, comparado con su homólogo? ____________________

¿Ambos triángulos son iguales en forma y tamaño? ____________________

Con las respuestas anteriores hagan un resumen. ____________________

Comparen sus resúmenes con los de otras parejas y, en caso necesario, complementen lo que les haga falta.

Pistas

Busquen en el diccionario el significado de las siguientes palabras:

Trasladar ____________________

Rotar ____________________

En el caso 1, ¿se efectuó una rotación o una traslación? ____________________

Compruébenlo trazando y recortando un cuadrilátero congruente al cuadrilátero ATUN y prueben su respuesta.

¿Coincidió el cuadrilátero ATUN con el cuadrilátero A'T'U'N' en todos sus bordes? ____________________

En el caso 2, ¿se efectuó una rotación o una traslación? ____________________

Compruébenlo trazando y recortando un triángulo congruente al triángulo LIA y rótenlo o trasládenlo, según su respuesta.

¿Coincidió el triángulo LIA con el triángulo L'I'A' en todos sus bordes? ____________________

Escuchen las opiniones de otros compañeros y equipos, y pregunten en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

La traslación

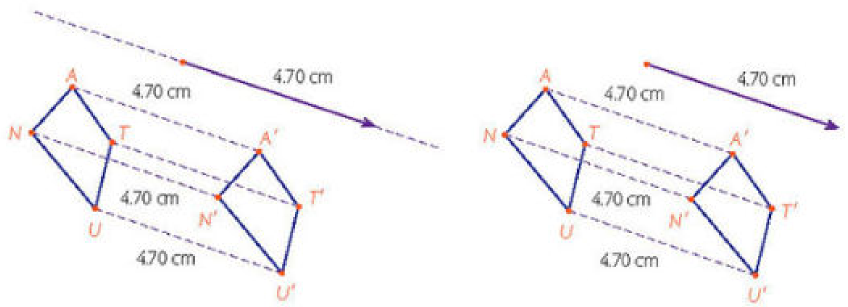


Figura 9.3

Una traslación se determina por una figura que se mueve, según un vector que tiene sentido, dirección y magnitud.

En la figura 9.3, el sentido está definido por la recta punteada; la dirección, por la punta de flecha; y la magnitud, por la distancia, que en el ejemplo es de 4.70 cm.

Cuando se efectúa correctamente una traslación, se debe cumplir con lo siguiente:

- Los lados homólogos de ambas figuras deben ser paralelos.
- Las figuras deben ser congruentes (tener la misma forma y tamaño).
- Las distancias entre los vértices correspondientes deben ser las mismas.
- Los movimientos de los vértices de la figura deben ser paralelos al vector.

Comprueba que en las figuras anteriores se cumplen las condiciones mencionadas.

La rotación

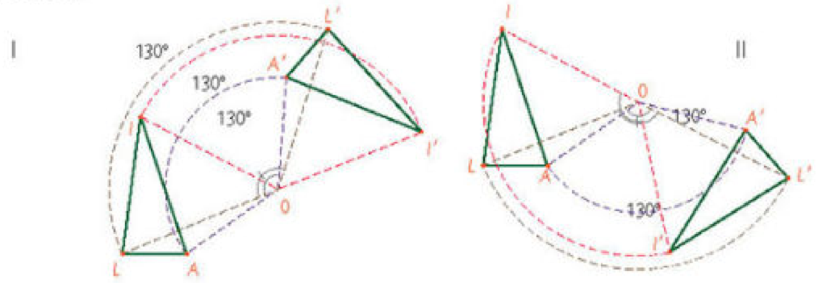


Figura 9.4 (I y II)

Una rotación se determina por una figura que gira una magnitud y una dirección determinadas, alrededor de un punto de rotación.

En la figura 9.4 (I y II), el punto de rotación está definido por la letra O; la magnitud por 130°. En la figura I, la dirección se hizo en el sentido en el que giran las manecillas de un reloj, a este sentido se le llama negativo (–).

En la figura II se hizo una rotación de 130° en sentido contrario al que giran las manecillas de un reloj, a este sentido se le llama positivo (+).

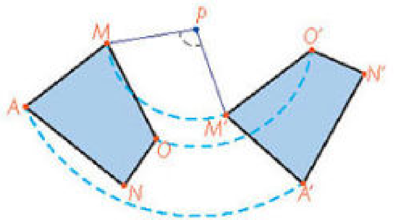
Mide y contesta cuánto miden los ángulos AOA', LOL', IOI'? ______________________

Los triángulos LIA y L'I'A' son congruentes o semejantes? ______________________

¿Por qué? ______________________

Verifica que en los triángulos anteriores se cumplen las condiciones mencionadas.

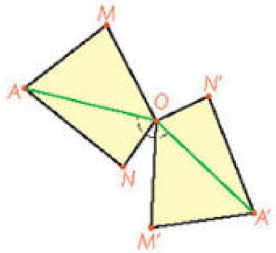
El centro de rotación puede estar fuera, dentro o sobre la figura. Observa los ejemplos en los que se han hecho diferentes rotaciones:



Punto de rotación *P* fuera de la figura

Figura 9.5

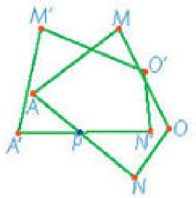
Mide el ángulo MPM' y contesta lo siguiente:
¿De cuánto es la magnitud del ángulo de rotación?
¿El sentido del giro es positivo o negativo?
Sin medir, indica cuánto mide el ángulo OPO'



Punto de rotación O en un vértice de la figura

Figura 9.6

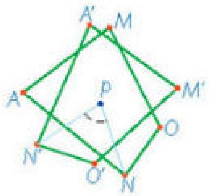
Mide el ángulo AOA' y contesta lo siguiente:
¿De cuánto es la magnitud del ángulo de rotación?
¿El sentido del giro es positivo o negativo?
Sin medir, indica cuánto mide el ángulo NON'.



Punto de rotación *P* sobre un lado de la figura

Figura 9.7

Mide el ángulo APA' y contesta lo siguiente:
¿De cuánto es la magnitud del ángulo de rotación?
¿El sentido del giro es positivo o negativo?
Traza el ángulo MPM' y, sin medir, indica cuánto mide.



Punto de rotación *P* dentro de la figura

Figura 9.8

Mide el ángulo NPN' y contesta lo siguiente:
¿De cuánto es la magnitud del ángulo de rotación?
¿El sentido del giro es positivo o negativo?
Traza el ángulo APA' y, sin medir, indica cuánto mide.

Observa los cuadriláteros de la figura 9.9 y responde.

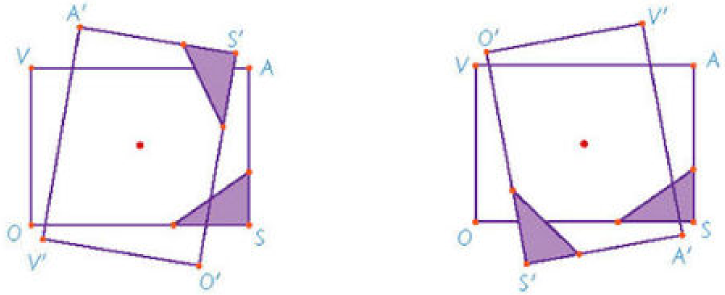


Figura 9.9

La magnitud del ángulo de rotación en cada caso ______________________

El sentido de la rotación en cada caso ______________________

Analicen en grupo la traslación y la rotación y, en caso de dudas, consulten a su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Cada uno y por separado tracen:

- La traslación de una figura y anoten la dirección y la magnitud.
  Una vez que la tracen, borren el vector que indica el sentido, la dirección y la magnitud, pero dejen escritas las letras de los vértices de ambas figuras.
- Pasen la traslación a su compañero para que la analice y dibuje el vector correspondiente, indicando el sentido, la dirección y la magnitud.
- Comparen sus vectores y, en caso de que no sean iguales, analicen dónde estuvo el error.
  Realicen la rotación de una figura y anoten el sentido y la magnitud.
- Una vez que la tracen, borren las líneas auxiliares y la magnitud, pero dejen escritas las letras de los vértices de ambas figuras y el centro de rotación.
- Pasen la rotación a su compañero para que la analice y diga el sentido y la magnitud.
- Comparen sus sentidos y magnitudes y, en caso de que no sean iguales, analicen dónde estuvo el error.

Cambien las rotaciones con otros equipos y analicen la que les toque.

Digan en cada caso los datos necesarios para trazar la rotación y, en caso de que no haya coincidencia, analicen las figuras para saber en dónde estuvo el error.

Expongan su trabajo en el grupo, si tienen alguna duda, hagan las preguntas correspondientes.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

Individualmente, resuelvan los siguientes ejercicios:

1. Haz la traslación que marca el vector.

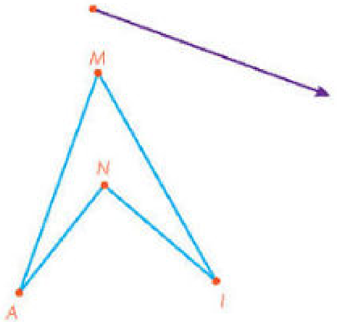


Figura 9.10

2. Efectúa dos rotaciones al cuadrilátero BIEN: una de – 60° y otra de 120°; usa como centro de rotación el punto O.

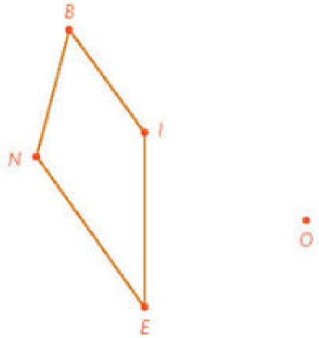


Figura 9.11

3. Consideren el centro de cada figura como centro de rotación y digan cuánto deben girar las figuras para que vuelvan a coincidir en todos sus bordes.

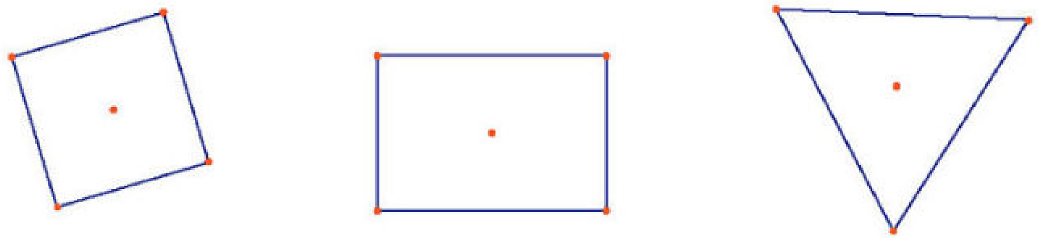


Figura 9.12

______ ______ ______

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

4. Observa el hexágono y responde las preguntas. El centro de rotación de la figura es H:

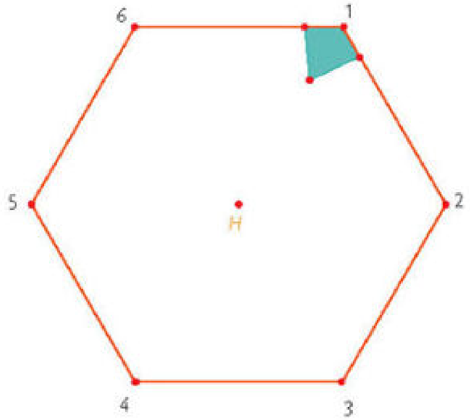


Figura 9.13

- ¿Cuántos grados debe girar para que la parte coloreada coincida con el vértice 2? ______
- ¿Cuántos grados debe girar para que la parte coloreada coincida con el vértice 3? ______
- Cuando la parte coloreada coincida con el vértice 5, ¿cuántos grados habrá girado? ______
- ¿Cuántos grados debe girar para que la parte coloreada vuelva a quedar en el vértice 1? ______

5. Analiza las figuras, dibuja el vector que indica la traslación e indica el sentido de la rotación y la medida del ángulo de giro.

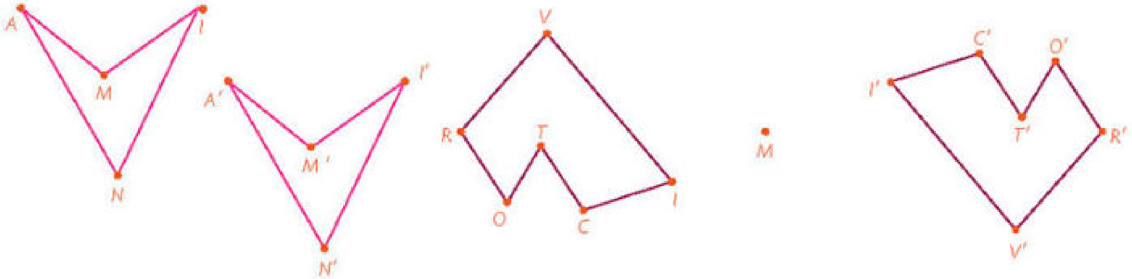


Figura 9.14

______

Compartan sus respuestas en grupo y, en caso de duda, verifiquen sus resultados.

Aplica las TIC

Si cuentan con una computadora y algún software de geometría, realicen en equipo la siguiente investigación. También pueden hacer la investigación en su cuaderno.

En un plano cartesiano, cuando se traza la figura simétrica a una que está en el primer cuadrante, y después se traza otra en el tercer cuadrante respecto a la que está en el segundo cuadrante, resulta una figura que también se puede obtener por rotación de la figura del primer cuadrante. ¿De cuánto debe ser dicha rotación?

Tracen un par de líneas perpendiculares, llamen a una de las líneas m y a la otra n.

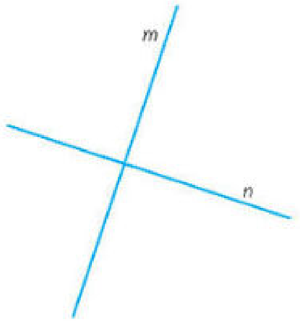


Figura 9.15

Tracen una figura en el segundo cuadrante.

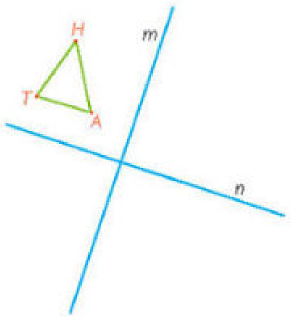


Figura 9.16

Configuren la computadora para que trace la figura simétrica, con respecto a la recta m.

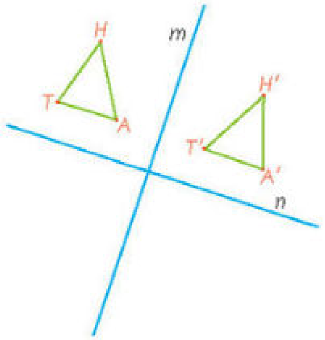


Figura 9.17

Aplica las TIC (*continuación*)

Configuren la computadora para que trace un triángulo simétrico al $\Delta H'T'A'$ con respecto a la recta n.

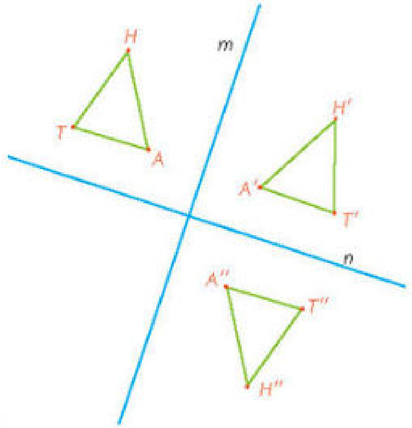


Figura 9.18

Finalmente, configuren a la computadora para que haga diferentes rotaciones en sentido negativo (–).

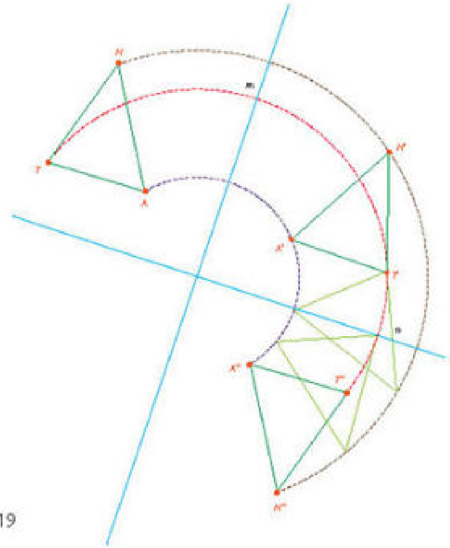


Figura 9.19

¿Cuántos grados se debe girar la figura del cuadrante II para que coincida con la del cuadrante IV?

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

Observa el siguiente logo de la compañía de camiones cuatro estrellas.

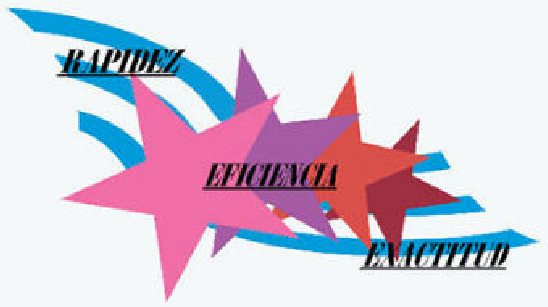


Figura 9.20

En algunos diseños que tienen que ver con la creación de logos o planos se utilizan herramientas geométricas, como la simetría, la rotación o la traslación.

Comenta brevemente con algún compañero cuál herramienta geométrica podrías usar en la elaboración del logo de la compañía de camiones cuatro estrellas y del rehilete.

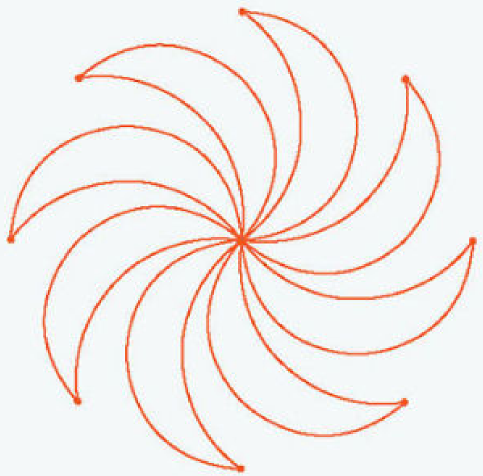


Figura 9.21

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la traslación y a la rotación de figuras. Comenten en grupo su resumen.

Lección 10

De todo un poco

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Para recordar

En parejas:

1. Tracen las dos traslaciones que indican los vectores:

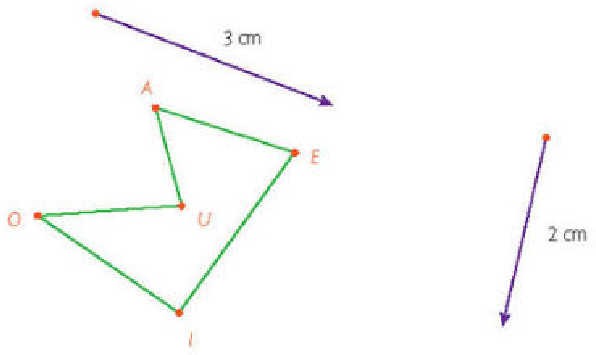


Figura 10.1

- Propongan un vector que directamente traslade la primera figura hasta la tercera.

2. Roten el cuadrilátero BIEN dos veces, usando como centro de rotación el punto O. Una vez 60° con giro positivo (+) y otra vez 120° también con giro positivo.

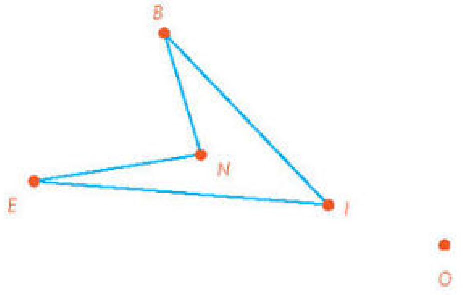


Figura 10.2

- Propongan un ángulo de rotación y un sentido (+ o –) que lleve directamente del primer cuadrilátero al tercero. ____________
- Comenten en el grupo la estrategia que siguieron para pasar directamente de las primeras figuras a las terceras, en caso de dudas, expónganlas ante el grupo.

RETO

En parejas o tríos, resuelvan el siguiente problema:

Isaac le pidió a Carmen que dedujera los trazos que hizo para dibujar a partir de la figura 10.3(1), las figuras 10.3(2), 10.3(3) y 10.3(4), solamente le dijo que usó simetría, traslación y rotación, y que para la rotación tomó como centro el punto *O* y para simetría, los ejes.

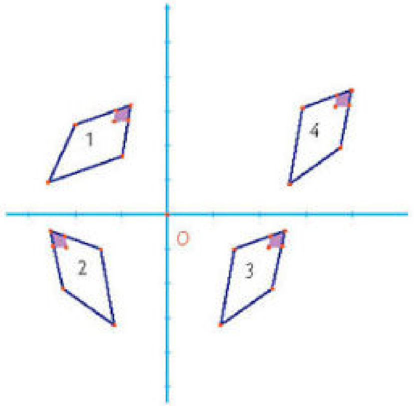


Figura 10.3

En cuál figura Isaac usó:

- Traslación ____________________
- Rotación ____________________
- Simetría ____________ ¿Qué tipo de simetría? ____________
- ¿De cuánto fue la rotación y en qué sentido? ____________
- Dibujen el vector que define la traslación.
- Escriban sus conclusiones a la solución del reto y compárenlas con otros equipos.

Pistas

Pueden trazar y recortar la figura 10.3(1) para confirmar o desechar sus suposiciones.

En una traslación, la figura se mueve en un sólo sentido y dirección.

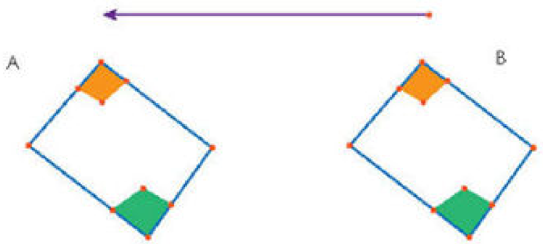


Figura 10.4 (A y B)

- ¿Cambia la posición de la figura en una traslación? ____________
  ¿Por qué? ____________
- ¿La figura 10.3(2) del reto se pudo obtener por traslación de la figura 10.3(1)? ____________
  ¿Por qué? ____________

Pistas (*continuación*)

En la figura 10.5 mide las distancias de los vértices homólogos al eje de simetría y escribe una conclusión en tu cuaderno.

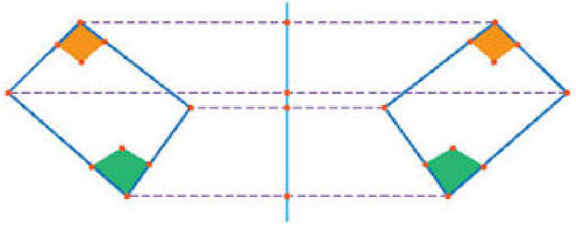


Figura 10.5

- En las figuras 10.3(1 y 2), ¿las distancias de los vértices homólogos al eje es la misma? ____________
  ¿Por qué? ____________

En una rotación, la figura original gira, tomando como base un punto de rotación. Observa la figura 10.6.

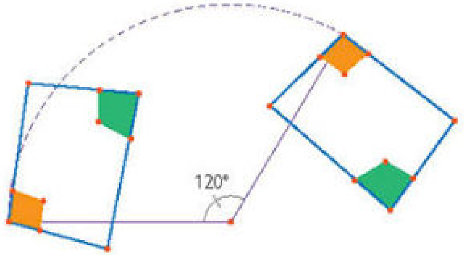


Figura 10.6

- ¿La figura 10.3(2) del reto se pudo obtener por rotación de la figura 10.3(1)? ____________
  ¿Por qué? ____________

La simetría central consiste en una rotación de 180°. Observa la figura 10.7.

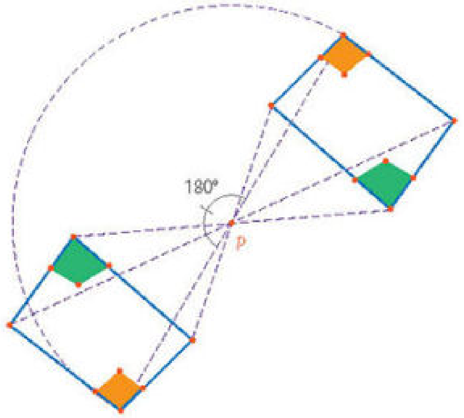


Figura 10.7

- ¿Isaac usó simetría central en alguna de las figuras? ____________
  ¿Por qué? ____________
- En grupo escuchen las opiniones de otros compañeros y equipos, y pregunten en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

Cuando se efectúan varias transformaciones a una figura, algunas veces puede hacerse en diferentes formas. Observa la figura 10.8.

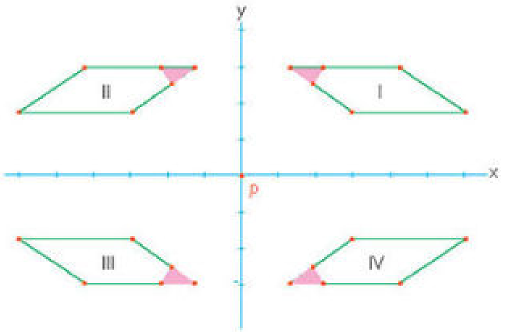


Figura 10.8 (I, II, III y IV)

En este caso, se puede realizar primero una simetría axial de la figura 10.8 (I) en relación con el eje *y* para obtener la figura 10.8 (II), después, una simetría central de la figura 10.8 (II) para obtener la figura 10.8 (IV) y, finalmente, una simetría axial con respecto al eje *y* de la figura 10.8 (IV), para obtener la figura 10.8 (III). ¿Es posible usar traslación en este caso? ______________________

¿Por qué? ______________________

Es importante que se indique con líneas punteadas el orden de las transformaciones.

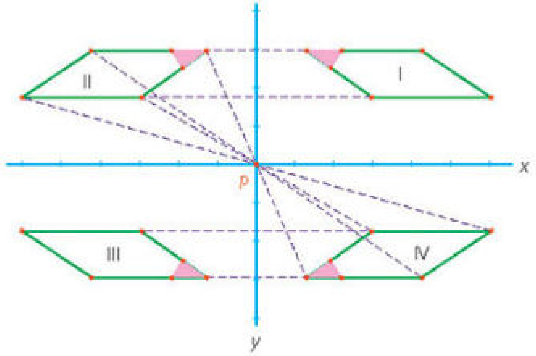


Figura 10.9

Escribe otra forma de obtener todas las figuras a partir de cualquiera de ellas. ______________________

____

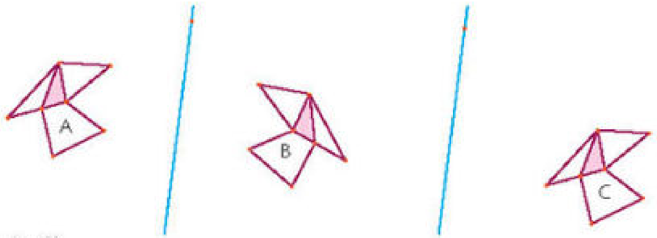


Figura 10.10 (A, B y C)

En el caso de las figuras marcadas con las letras A, B, C escribe una forma de obtener las figuras A y C a partir de la figura B. ______________________

¿Se puede utilizar traslación para obtener alguna de las figuras? ______________________
¿En qué caso? ______________________

Escribe otra forma de obtener las dos figuras restantes a partir de cualquiera de ellas. ______________________

____

En todos los casos, las medidas de los lados y de los ángulos se deben conservar.

Consulten la siguiente página electrónica, para que observen y analicen algunos ejemplos sobre movimientos rígidos en el plano. Elijan el que quieran ver del menú que aparece a la izquierda en la página.

http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos/Movimientos_plano_vectores_JS/index.html Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.

Analicen en grupo los casos de simetría axial y central, rotación y traslación y, en caso de dudas, consulten a su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

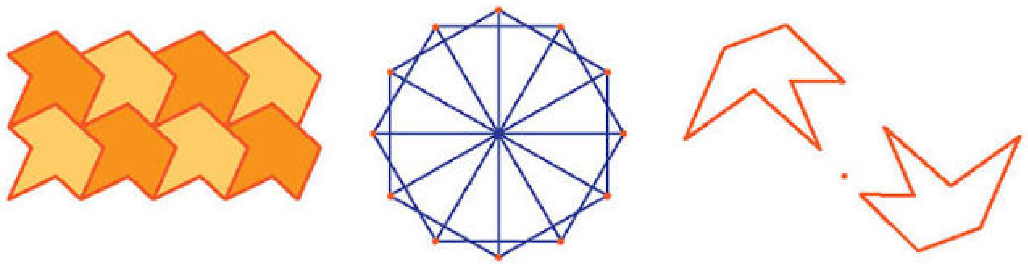
Escriban dentro del paréntesis F, si la afirmación es falsa y V, si es verdadera:

- Las rectas se transforman en curvas cuando les aplicas una simetría central. ( )
- En una reflexión (simetría axial) los ángulos crecen. ( )
- Las distancias al eje de simetría de dos puntos homólogos son diferentes. ( )
- Las distancias al eje de simetría de dos puntos homólogos son iguales. ( )
- Se conservan las longitudes de los lados en las simetrías, reflexiones, rotaciones y traslaciones. ( )
- Se conservan los ángulos en las simetrías, reflexiones, rotaciones y traslaciones. ( )
- Las paralelas dejan de serlo en las simetrías, reflexiones, rotaciones y traslaciones. ( )
- Se pierde la perpendicularidad en las simetrías, reflexiones, rotaciones y traslaciones. ( )
- Solamente en la simetría axial y en las reflexiones se conserva la colinealidad. ( )
- Si aplicas una simetría central a un triángulo con un vértice A, dicho vértice quedará con una orientación opuesta al original con respecto al centro de simetría (por ejemplo, si estaba arriba, quedará abajo del eje de simetría). ( )
- Depende de la simetría que uses, el que se conserven o no las distancias, los ángulos y la colinealidad. ( )
- Depende de la simetría que se aplique a una figura, para que se conserve la congruencia de la figura resultante. ( )
- Si ves un ángulo de 25° con una lente que aumente al doble de tamaño, el ángulo se ve de 50°. ( )
- Si a un triángulo equilátero se le aplica simetría central y el centro de simetría es el centro del triángulo, los lados vuelven a coincidir. ( )
- En las traslaciones interviene un vector que indica sentido, dirección y magnitud. ( )
- Una simetría central es siempre una rotación. ( )
- Una rotación es siempre una simetría central. ( )

Escucha las opiniones de otros compañeros y de otros equipos. Expongan su trabajo en el grupo y, en el caso de que tengan algún error, corríjanlo.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. Analicen las siguientes composiciones y digan qué tipo de transformación se usó en su construcción. En el caso de traslación, dibujen el vector de traslación. En la rotación indiquen el ángulo y el sentido. En la simetría axial señalen el eje. La simetría central necesita de un centro de simetría.



1 2 3

Caso 1 ______ Caso 2 ______ Caso 3 ______

Figura 10.11

2. Observa algunos logos comerciales y define con cuál tipo de transformación sería más fácil reproducirlos. Dibújalos en tu cuaderno y compáralos con los de tus compañeros.
3. Traza lo que se indica en cada caso:
   - La figura simétrica a TODA con respecto al eje m.
   - La traslación que marca el vector.
   - La rotación que indica el ángulo con respecto al punto P.
   - La simetría central con respecto al punto Q.

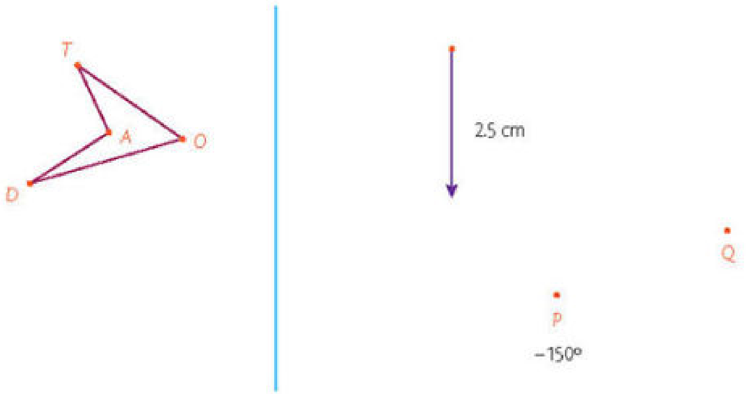


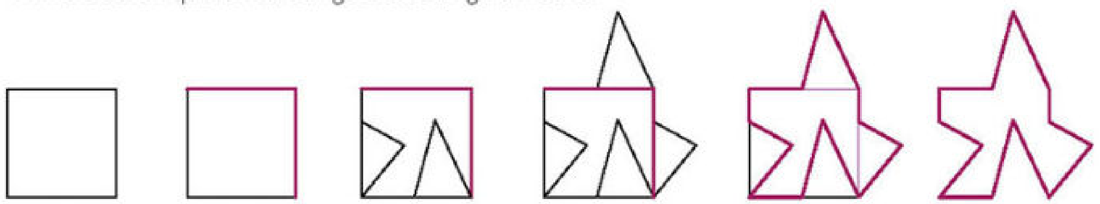
Figura 10.12

4. Redacta en diferentes hojas de papel mensajes para solicitarle a un compañero que trace a una figura dada algunas transformaciones que le indiques. Comparen las figuras trazadas y, en caso de error, corrijan.

Aplica las TIC

Si cuentan con una computadora y algún software de geometría, realicen en equipo la siguiente teselación.

Primero tienen que formar su figura base o figura motivo.



1 2 3 4 5 6

Figura 10.13

1. Tracen un cuadrado.
2. Tracen dos vectores, uno sobre un lado y otro sobre su lado perpendicular.
3. Tracen una o dos figuras dentro del cuadrado.
4. Usando los vectores trazados, trasladen las figuras que dibujaron dentro.
5. Remarquen la nueva figura, sin tomar en cuenta el cuadrado original.
6. Tienen ya la pieza motivo.

Ahora trasladen la pieza motivo hacia donde indican los vectores, tantas veces quieran.

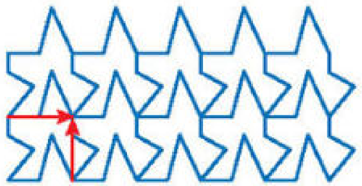


Figura 10.14

Pueden usar también simetría axial.

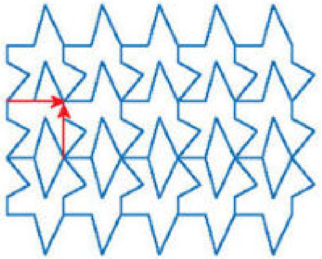


Figura 10.15

Finalmente, oculten los vectores y coloreen a su gusto la teselación.

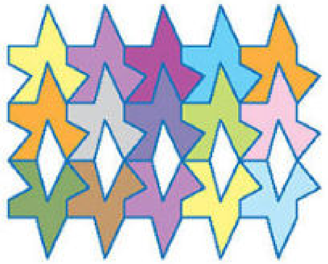


Figura 10.16

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Curiosidades

La importancia de las transformaciones rígidas

Se llaman transformaciones rígidas en el plano a las simetrías, rotaciones y traslaciones.

Es posible encontrar ejemplos en la naturaleza, en donde en forma de arte y belleza se ha aplicado.

Figura 10.17

Figura 10.18

Figura 10.19

También en la vida diaria encontramos algunos ejemplos.

Figura 10.20

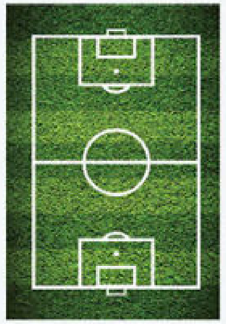


Figura 10.21

Figura 10.22

Cuando vayas de paseo o en tu comunidad, busca otros ejemplos en las plantas, los animales o los edificios.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras. Comenten en grupo su resumen.

Lección 11

Puros cuadrados

Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Para recordar

En parejas:

1. En cada caso tracen un cuadrado tomando como base los siguientes segmentos.

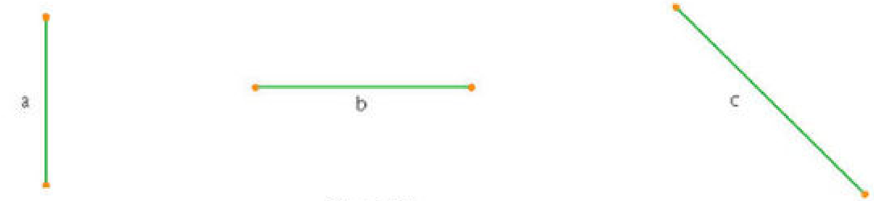


Figura 11.1

Escriban dentro de cada cuadrado la medida del área.

Comenten en el grupo la estrategia que siguieron para trazar los cuadrados y para calcular el área de cada uno.

RETO

En parejas o tríos, resuelvan el siguiente problema:

Sigan las instrucciones para trazar en cartón, cartulina o algún otro material resistente las siguientes figuras, recórtenlas y armen con las cinco piezas un cuadrado congruente al que está sobre el lado c del triángulo.

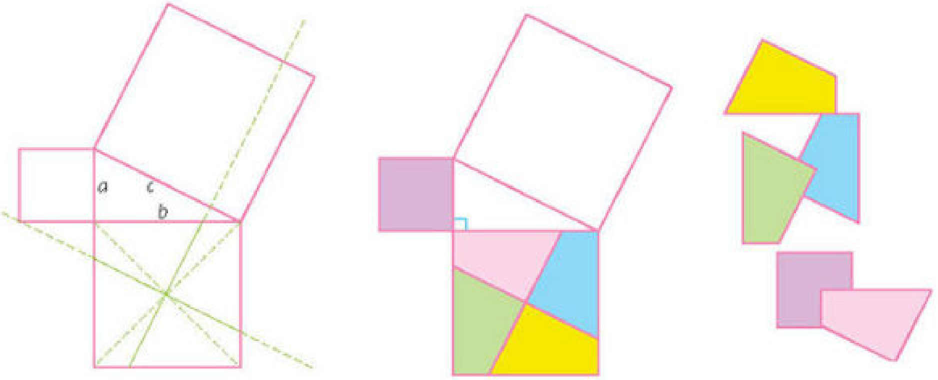


Figura 11.2

- Tracen un triángulo que tenga por lados 6, 8 y 10 cm, respectivamente. Midan los ángulos internos del triángulo.
- Llamen a los lados a,b,c como se muestra en la imagen.

- Tracen sobre cada lado del triángulo un cuadrado, tomando como medida cada uno de los lados del triángulo.

¿Cuánto mide el área de cada cuadrado, tomando como medida los lados a,b,c, respectivamente? ______

Para dividir el cuadrado trazado sobre el cateto b.

- Tracen con líneas punteadas las diagonales para encontrar el centro del cuadrado.
- Tracen con línea continua una recta paralela al lado c, que pase por el centro del cuadrado.
- Tracen con línea continua una perpendicular al lado c, que pase por el centro del cuadrado.
- Coloreen el cuadrado que está sobre el lado a.
- Coloreen las piezas que se formaron en el cuadrado del lado b.
- Recorten las piezas coloreadas.
- Armen el cuadrado.

¿Qué tipo de triángulo trazaron inicialmente? ______

Utilizando las piezas recortadas comprueben que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c^2 - b^2 = a^2$$
$$c^2 - a^2 = b^2$$

Escriban una conclusión sobre las relaciones que encontraron entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

______
______
______

Pistas

Una forma de comprobar lo que pide el reto es medir cuidadosamente las dimensiones de uno de los lados de cada cuadrado:

Lado a = ______ cm
Lado b = ______ cm
Lado c = ______ cm

Después calculen el área de cada cuadrado:

Cuadrado de lado a = ______ cm^2
Cuadrado de lado b = ______ cm^2
Cuadrado de lado c = ______ cm^2

Finalmente prueben que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c^2 - a^2 = b^2$$
$$c^2 - b^2 = a^2$$

Pistas (*continuación*)

Al sustituir los valores encontrados, ¿se cumplieron satisfactoriamente las igualdades? ______
¿Por qué? ______

Otra forma de comprobar lo anterior es haciendo lo siguiente:

Para probar la primera igualdad: $a^2 + b^2 = c^2$, coloquen las cinco piezas recortadas sobre el cuadrado construido en el lado c del triángulo:

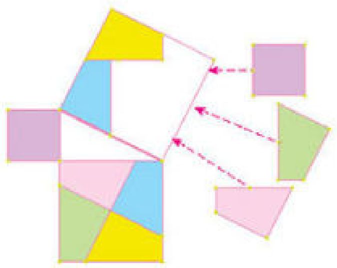


Figura 11.3

¿Las piezas cubrieron exactamente al cuadrado?
¿Se puede afirmar que $a^2 + b^2 = c^2$? ______
¿Por qué? ______

Para comprobar que $c^2 - b^2 = a^2$, retiren del cuadrado cubierto por las cinco piezas la que corresponde a b^2.

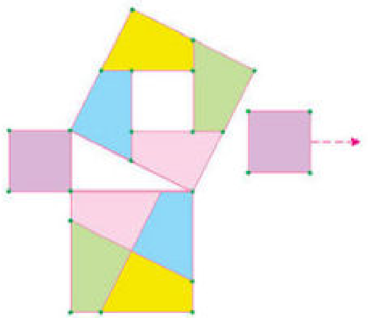


Figura 11.4

¿Qué quedó en el cuadrado? ______
¿Se puede afirmar que $c^2 - b^2 = a^2$? ______
¿Por qué? ______

Vuelvan a cubrir el cuadrado con las cinco piezas y ahora comprueben que $c^2 - a^2 = b^2$.
¿Cómo prueban esta igualdad? ______
¿Se puede afirmar que $c^2 - a^2 = b^2$? ______
¿Por qué? ______

Comenten sus resultados en grupo, escuchen las opiniones de otros compañeros y equipos y pregunten, en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

Los triángulos rectángulos se caracterizan por tener un ángulo interno de 90° (ángulo recto).

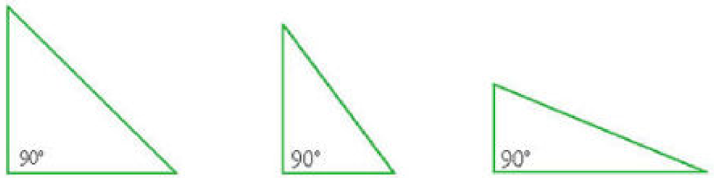


Figura 11.5

En este tipo de triángulos, se cumple que:

> La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto, es igual al área del cuadrado construido sobre el tercer lado.

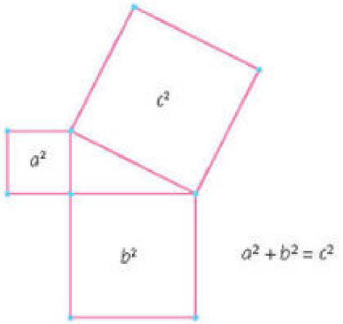


Figura 11.6

GLOSARIO
Hipotenusa. En un triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto
Catetos. Lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Esta relación entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo recibe el nombre de teorema de Pitágoras. Y dice así:

En cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De esta relación se desprenden otras dos relaciones importantes.
Si a, b representan los catetos y c, la hipotenusa entonces:
$a^2 + b^2 = c^2$ se puede despejar, por ejemplo a^2 quedando la igualdad como sigue:
$a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 + b^2 - b^2 = c^2 - b^2$

así que:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Despeja b^2 y escribe la igualdad resultante.

Consulten la siguiente página electrónica para que observen y analicen el teorema de Pitágoras.
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html
Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.
Analicen en grupo los casos vistos en la liga electrónica y, en caso de dudas, consulten a su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Comprueben si la relación encontrada entre los cuadrados formados en los lados de un triángulo rectángulo, es válida para otro tipo de triángulo.

Utilicen los siguientes triángulos, midan los lados y después completen la tabla:

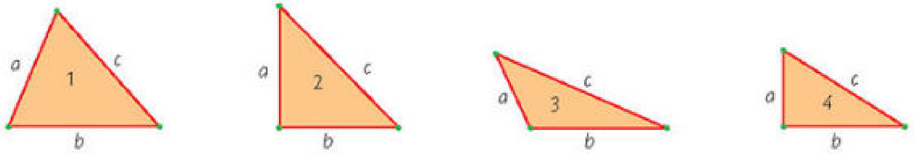


Figura 11.7

Número de triángulo	Cuadrado de la medida de los lados			Cumple con $a^2 + b^2 = c^2$		Tipo de triángulo por la medida de sus ángulos
	a^2	b^2	c^2	SÍ	NO	
1						
2						
3						
4						

Tabla 11.1

¿Qué tipo de triángulos cumplen con la relación de que la suma de los cuadrados de dos lados sea igual al cuadrado del tercer lado? ______

Escucha las opiniones de otros compañeros y de otros equipos. Expongan su trabajo en el grupo y, en el caso de que tengan algún error, corríjanlo.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. Robín es jardinero y debe colocar pasto en el área de tierra. Si cobra de mano de obra $20.00 por cada metro colocado. ¿Cuánto cobrará en total? ______

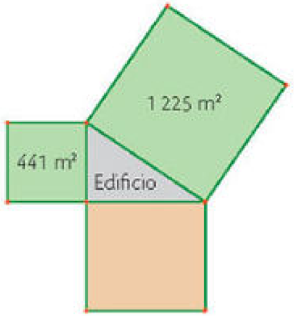


Figura 11.8

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

2. Utiliza tus conocimientos de álgebra para comprobar que:

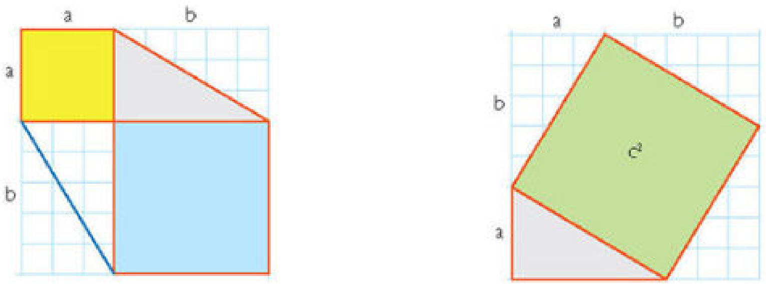


Figura 11.9

La suma de las aéreas de los cuadrados amarillo y azul es igual al área del cuadrado verde.
Comparen en grupo las estrategias para solucionar los problemas y, en caso de encontrar algún error, corrijan.

Aplica las TIC

Si cuentan con una computadora y algún software de geometría, realicen en equipo los siguientes trazos para comprobar que en cualquier triángulo rectángulo se cumple que:

> La suma de las áreas de los cuadrados, trazados con la misma longitud que los lados que forman el ángulo recto, es igual al cuadrado formado con la longitud del tercer lado.

Primero tienen que trazar un triángulo rectángulo.

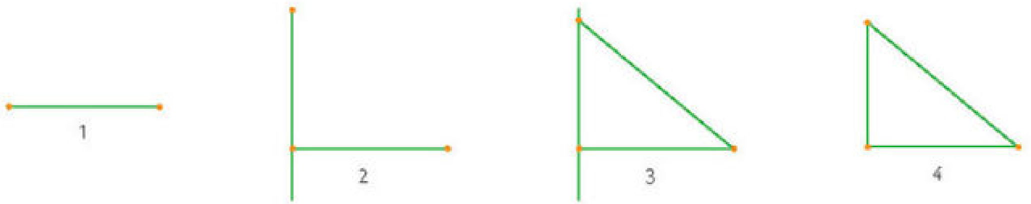


Figura 11.10

1. Tracen un segmento.
2. Tracen una perpendicular en uno de los extremos.
3. Tracen un triángulo, tomando como dos de sus vértices un punto sobre la perpendicular y; el otro, el extremo del segmento inicial.
4. Oculten la perpendicular y dejen solamente el triángulo.

Aplica las TIC (*continuación*)

Tracen un cuadrado sobre cada lado, tomando como lado su longitud.
Un método puede ser el siguiente:

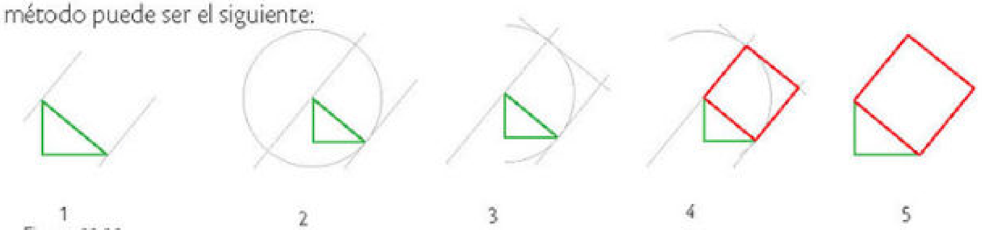


Figura 11.11

1. Tracen perpendiculares en los extremos de uno de los lados.
2. Tracen un círculo, usando como centro uno de los extremos del lado y como radio, la longitud del mismo lado.
3. Tracen una recta paralela al lado del triángulo, y que pase por la intersección del círculo con una de las perpendiculares.
4. Remarquen el cuadrado que se formó.
5. Oculten el círculo, las rectas perpendiculares y la paralela.

Sigan el mismo procedimiento para trazar los otros cuadrados que están sobre los demás lados del triángulo.

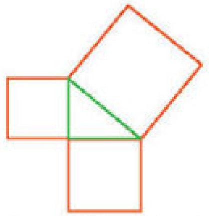


Figura 11.12

Configuren la computadora para que les indique el área de cada cuadrado.

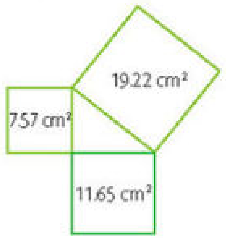


Figura 11.13

Comprueben que se cumple lo que se quiere investigar. Muevan los vértices del triángulo y observen cómo cambian las áreas.

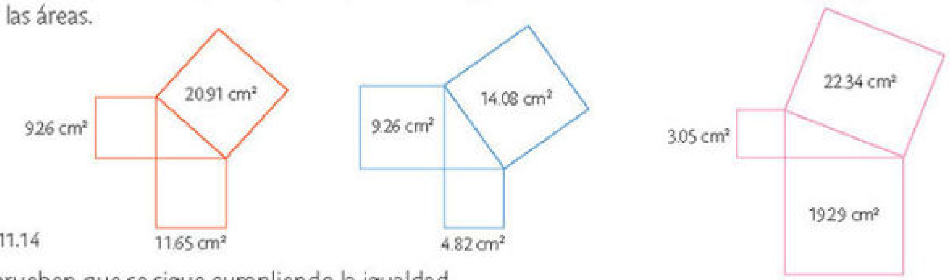


Figura 11.14

Comprueben que se sigue cumpliendo la igualdad.
Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

El teorema de Pitágoras

Lectura

El famoso teorema, al parecer, era ya conocido en Oriente desde tiempos previos al de Pitágoras.
En el siguiente diseño con azulejos se puede apreciar tal hecho contando los mosaicos.

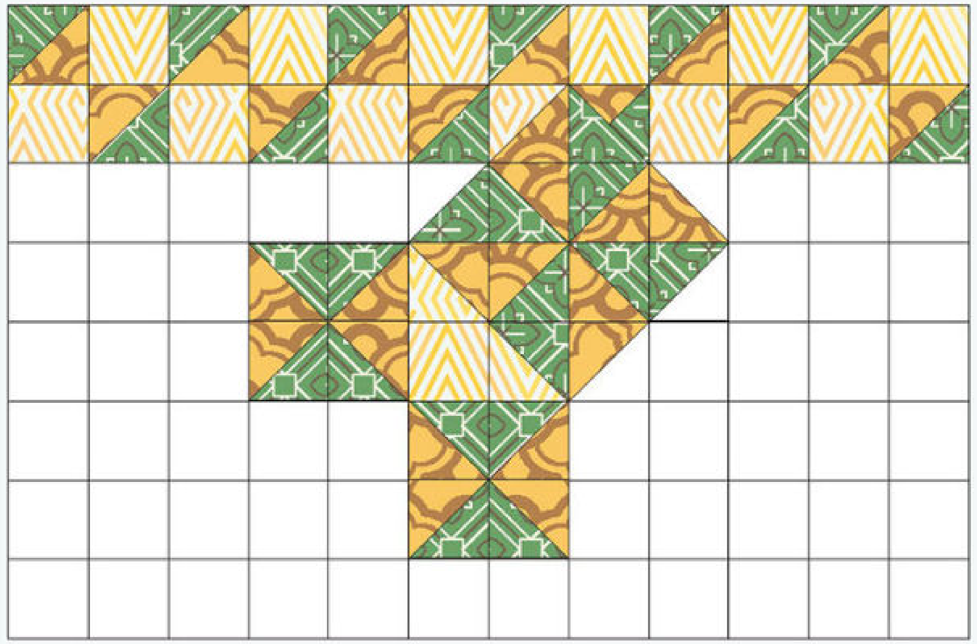


Figura 11.15

Entren a la siguiente página electrónica para que vean algunas comprobaciones del teorema de Pitágoras. http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.

Comenten en grupo lo visto en la página electrónica y expresen sus dudas, en caso de que las haya.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Comenten en grupo su resumen.

Lección 12 El teorema de Pitágoras

Tema: Medida

Contenido: Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Para recordar

En parejas:

Usen las letras *a,b,c* para expresar todas las relaciones solicitadas.

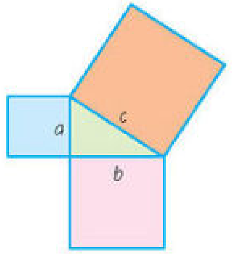


Figura 12.1

1. Escriban dentro de cada cuadrado la expresión que representa su área.
2. Utilicen las literales y sus conocimientos de álgebra para expresar, en función de las otras dos variables, lo siguiente:

$c^2 =$ ______ $b^2 =$ ______ $a^2 =$ ______

$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

¿Qué representan a^2, b^2 y c^2? ______

Comenten en el grupo la estrategia que siguieron para expresar las relaciones solicitadas, en caso de dudas, expónganlas ante el grupo.

RETO

En parejas o tríos, resuelvan el siguiente problema:

Eduardo está jugando en la computadora y tiene que decidir su siguiente jugada para poder acceder al edificio de los retos. Las condiciones son las siguientes:

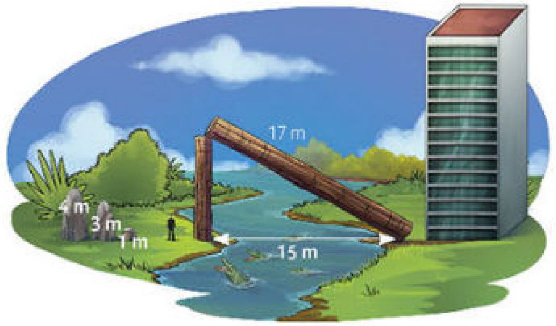


Figura 12.2

El guerrero salta hacia arriba 5 m cada vez que lo hace. Tiene que llegar exactamente a la cúspide del tronco que está en pie, si salta de más o de menos, pierde.

En caso necesario, sólo una vez puede ayudarse de una de las piedras.

¿Podrá saltar el guerrero a la cúspide del tronco sin ayuda de las piedras? ____________

¿Qué jugada tendrá que hacer Eduardo para pasar al edificio? ____________

¿Por qué? ____________

Escriban sus conclusiones a la solución del reto y compárenlas con las de otros equipos.

Pistas

Para resolver el reto, pueden seguir alguna de las orientaciones:

1. Construyan a escala el escenario para que sepan la medida del tronco al que tiene que llegar con un brinco el guerrero. ¿Qué escala utilizarían si siguen esta opción? ____________
   ¿Por qué? ____________

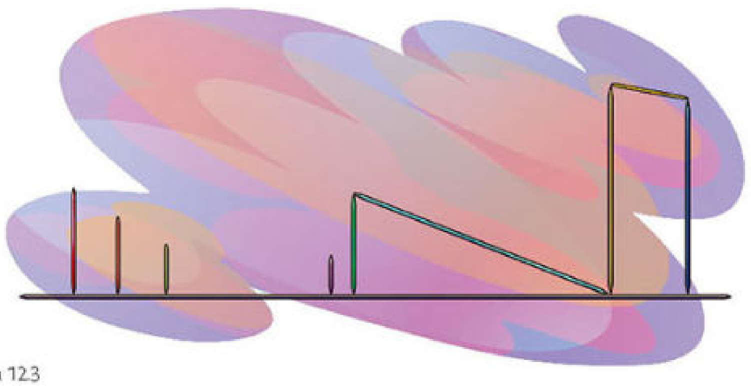


Figura 12.3

2. Usen el teorema de Pitágoras para saber cuánto mide el tronco que tiene que subir el guerrero. Hagan una representación del triángulo que tienen que formar con los datos del problema.

¿Cuáles son los datos conocidos? ____________

¿Cómo calculan el dato desconocido? ____________

Pistas (*continuación*)

¿Necesitará el guerrero alguna piedra para llegar a la cúspide del tronco que sigue en pie? ____________

¿Por qué? ____________

En caso de necesitar alguna piedra, ¿cuál necesitará? ____________

En grupo escuchen las respuestas de sus compañeros, comparen sus procedimientos y pregunten a su profesor, si tienen alguna duda.

Formalización

En un triángulo rectángulo, a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos, y al lado que se opone al ángulo recto se le llama hipotenusa.

Figura 12.4

El teorema de Pitágoras se puede aplicar a cualquier triángulo rectángulo, el cual menciona que:

La suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa: $a^2 + b^2 = c^2$

De la igualdad anterior se pueden obtener las siguientes igualdades:

$c^2 - b^2 = a^2$ $\qquad$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$c^2 - a^2 = b^2$ $\qquad$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

En los triángulos rectángulos isósceles, los catetos miden lo mismo y el teorema de Pitágoras puede representarse de la siguiente forma:

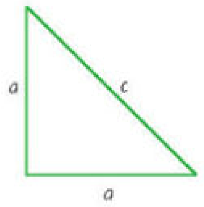


Figura 12.5

$a^2 + a^2 = c^2$, o bien, como $2a^2 = c^2$

¿Cómo despejarías las siguientes variables?

$a =$ ____________

$c =$ ____________

Es posible combinar algunos casos de semejanza con el teorema de Pitágoras, por ejemplo, en el siguiente dibujo, calcula las medidas faltantes:

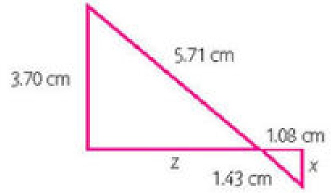


Figura 12.6

Calcula en tu cuaderno la variable z hasta décimos, usando el teorema de Pitágoras.
Ahora utiliza la semejanza de triángulos para calcular la misma variable z.
Escribe los resultados obtenidos con ambos procedimientos:
Pitágoras ________________
Semejanza ________________

Las medidas y los resultados pueden variar un poco, dependiendo de la exactitud de la medida y los decimales usados al resolver las operaciones.

Calcula en tu cuaderno el valor de la otra variable, usando ambos procedimientos.

Analicen en grupo el teorema de Pitágoras y la forma de expresar una variable en función de las demás y, en caso de dudas, consulten a su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas o tríos y resuelvan el siguiente problema:

A Víctor y a Robín les encargaron la construcción de una alberca con cuatro zonas de chapoteadero, como se muestra en la figura 12.7.

Quieren construir un muro que separe a los chapoteaderos de la parte profunda, como lo ilustra la figura:

¿Cuánto medirá el perímetro de la barda que separa los chapoteaderos?

¿Qué área del fondo de la alberca ocupará la parte profunda representada con el cuadrilátero azul fuerte?

¿Qué área tendrá en total el fondo de la alberca?

¿Qué área del fondo de la alberca ocupará cada uno de los triángulos azul claro?

Figura 12.7

Escucha las opiniones de otros compañeros y de otros equipos. Expongan su trabajo en el grupo y, en el caso de que tengan algún error, corríjanlo.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. ¿Cuánto mide el poste? ________________

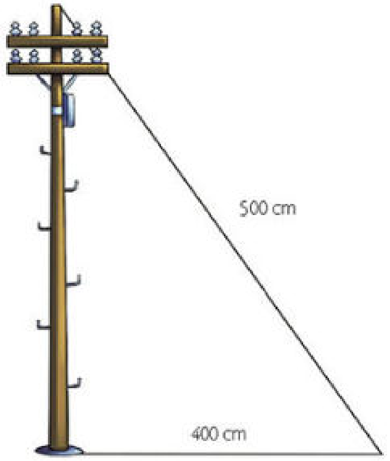


Figura 12.8

2. Calcula el perímetro y el área del triángulo OLI.

Perímetro = ________________
Área= ________________

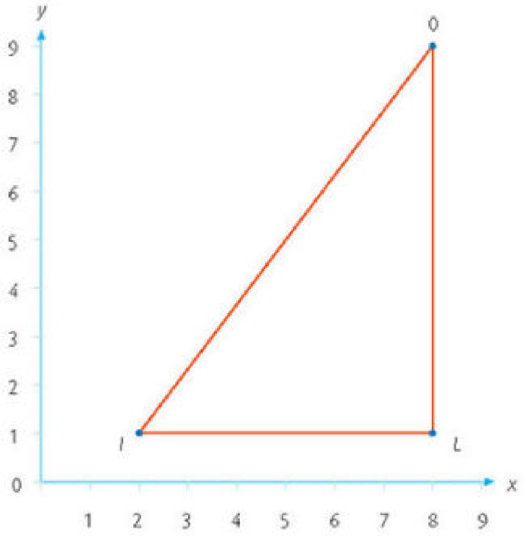


Figura 12.9

3. Calcula el área del rectángulo.

Área = ________________

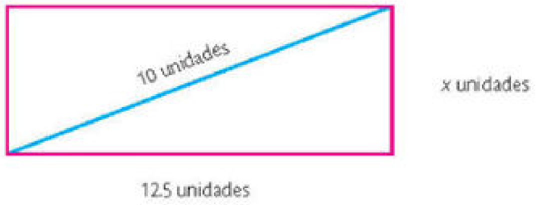


Figura 12.10

4. Calcula la altura del objeto pequeño.

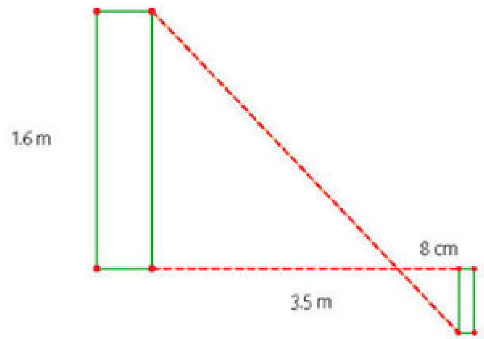
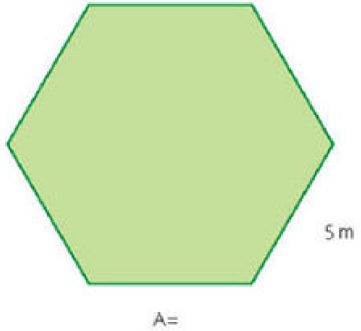


Figura 12.11

5. El siguiente jardín tiene 5 m por cada lado. Calcula el área que ocupa.



A=

Figura 12.12

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

6. Calcula el perímetro del cuadrado exterior.

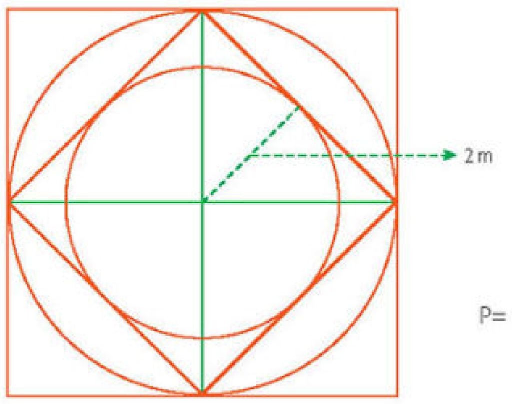


Figura 12.13

Comparen sus respuestas en grupos, en caso de dudas, pregunten y, en caso de error, corrijan.

Aplica las TIC

Usa algún software de geometría para probar el teorema de Pitágoras.

En este caso construirás sobre los catetos y la hipotenusa, triángulos equiláteros . También probarás si el teorema de Pitágoras se sigue cumpliendo.

Algunos de los comandos que se usarán son: segmento, recta perpendicular, triángulo, calcular área.

A. Traza un segmento.
B. Traza una perpendicular en un extremo del segmento.
C. Marca un punto sobre la perpendicular trazada.
D. Usa la herramienta triángulo y forma un triángulo uniendo el punto sobre la perpendicular y los extremos del segmento.
E. Oculta la perpendicular.

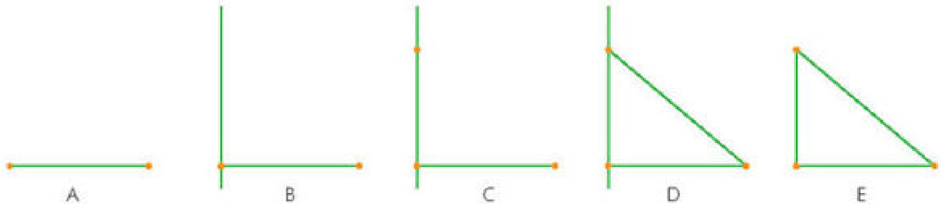


Figura 12.14

Aplica las TIC (*continuación*)

F. Sobre cada cateto y sobre la hipotenusa, traza un triángulo equilátero, para ello, usa como lado la misma medida del cateto o de la hipotenusa.
G. Calcula el área de cada triángulo formado.

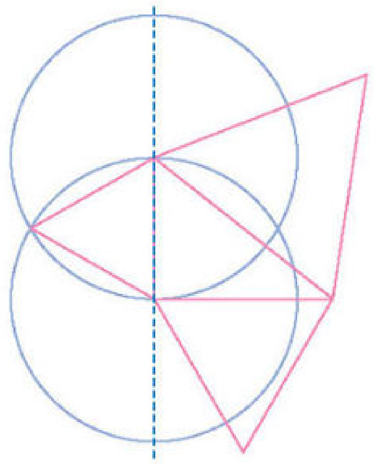


Figura 12.15

H. Oculta los trazos auxiliares.
I. Comprueba que la suma de las áreas de los triángulos sobre los catetos es igual al área del triángulo formado sobre la hipotenusa.
J. Mueve uno de los vértices del triángulo original y comprueba que permanece la relación entre las áreas de los triángulos sobre los catetos y la hipotenusa.

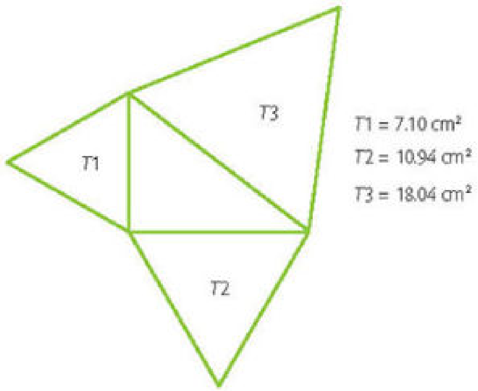


Figura 12.16

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

Teorema de Pitágoras

Para ampliar el teorema de Pitágoras, se puede afirmar que:

Si sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo construimos figuras semejantes de modo que sus lados sean homólogos en esa relación de semejanza, entonces la suma de las áreas de dichas figuras construidas sobre los catetos, será igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.

Por ejemplo:

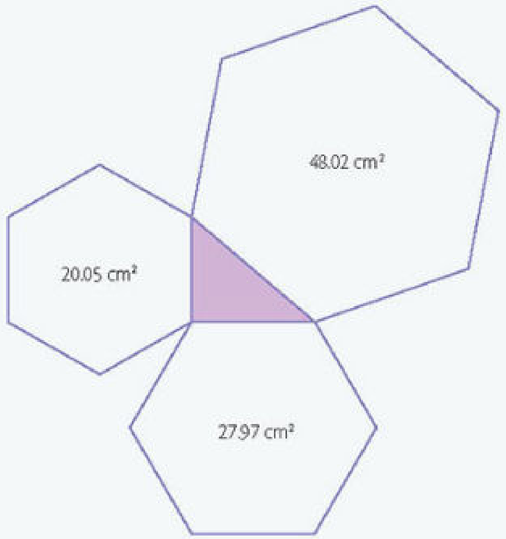


Figura 12.17

Comprueba que se cumple el teorema con los hexágonos regulares trazados sobre cada lado del triángulo.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto al teorema de Pitágoras. Comenten en grupo su resumen.

Lección 13

¿Cuál es tu juego?

Tema: Nociones de probabilidad

Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Para recordar

Se lanzan al aire dos monedas diferentes. Describe los siguientes pares de eventos:

- Águila en la primera moneda; parejas (resultado igual en las dos monedas).
- Parejas; disparejas (resultados diferentes en las dos monedas).

Comparen sus descripciones y comenten con su profesor.

RETO

Resuelvan lo siguiente por equipos.

En la alberca de la ciudad va a haber una competencia regional de clavados y le regalaron a la escuela secundaria varios boletos de cortesía. Le corresponde un boleto a cada grupo, y el subdirector va a escoger, al azar, un alumno de las listas de cada grupo.

En el grupo de 3° A hay 48 alumnos: 12 practican sólo futbol, 16 únicamente la natación y ocho, exclusivamente basquetbol. Por su parte, seis alumnos se dedican tanto a la natación como al basquetbol, y los demás no practican ningún deporte.

Al profesor de educación física le preocupa cómo se van a repartir los boletos. Quiere saber cuál es la probabilidad de que en el 3° A le toque a un alumno que no practica ningún deporte. También quisiera saber qué tan probable es que el alumno elegido en ese grupo:

- Practique futbol.
- No juegue futbol.
- Juegue sólo basquetbol.
- Practique basquetbol y natación.
- Practique basquetbol o natación.

¿Puedes ayudar al profesor con los cálculos que necesita efectuar?

Comparen los diferentes caminos utilizados para resolver el reto; traten de explicar las diferencias en resultados y procedimientos, y comenten con su profesor.

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden ser útiles al resolver el reto anterior. Busca información, averigua todo lo que consideres necesario para resolverlo. Trabaja en tu cuaderno.

- ¿Cuál es el experimento aleatorio y cuáles son sus posibles resultados?
- ¿Cuántos alumnos hay en total y cuántos practican cada deporte? Elabora diagramas o esquemas que te ayuden.

Pistas (*continuación*)

- Para calcular la probabilidad de los eventos en este problema, ¿cuál de los procedimientos que conoces será el adecuado?
- ¿Cuál es la probabilidad de cada alumno de ser seleccionado?

Formalización

Al seleccionar a un alumno, ¿cuáles son las posibilidades de que practique algún deporte?

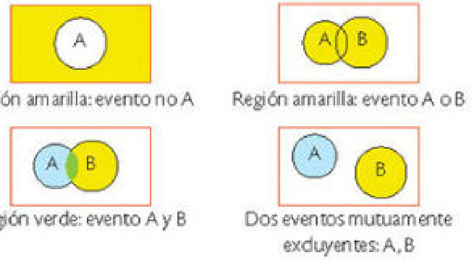
____

Para saber cuántos alumnos del grupo corresponden a cada una de las posibilidades anteriores, contesta lo siguiente:

- ¿Cuántos alumnos hay en total en el grupo de 3° A? ______________
- ¿Cuántos de ellos juegan futbol? __________ ¿Y cuántos sólo practican natación? __________ ¿Sólo basquetbol? __________ ¿Ningún deporte? __________
- Organiza estos resultados en una tabla; también puedes utilizar un diagrama de Venn, como se muestra en el glosario; considera cada deporte como un evento diferente; elabora una tabla y un diagrama en tu cuaderno.

GLOSARIO

Diagramas de Venn. Son dibujos informales que ayudan a visualizar las relaciones entre eventos. La colección de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio (su espacio muestral) se considera contenida en el interior de un rectángulo. Otros eventos se identifican por medio de regiones específicas dentro de este rectángulo. La figura siguiente muestra varios diagramas de Venn:



En ocasiones puede ser útil agregar el número de elementos o resultados simples que hay en cada evento, debajo de la letra que identifica al evento o por fuera del rectángulo.

La probabilidad de que un alumno del grupo sea elegido al azar es: ______________

Si llamamos F al evento Practica futbol, la probabilidad de que el alumno seleccionado se dedique al futbol es de:

$$P(F) = \_\_\_\_$$

Por su parte, el evento complementario de F es No practica futbol y se escribe como F^c, la probabilidad de que el alumno seleccionado no practique el futbol es de:

$$P(F^c) = \_\_\_\_$$

GLOSARIO

Eventos complementarios. Son eventos mutuamente excluyentes que en conjunto comprenden a todo el espacio muestra. Si A es un evento, su complemento se escribe A^c, e incluye a todos los resultados individuales que no están en A.

¿Cuánto es $P(F) + P(F^c)$? ______________

¿Qué significa $P(F) + P(F^c)$, y su resultado? ______________

____

Comparte con tus compañeros.

Con base en lo anterior, si conocemos la probabilidad de un evento cualquiera A, la probabilidad de su evento complementario es:

$$P(A^C) = \_\_\_\_$$

Con base en lo anterior, podemos observar que:

- El evento F está formado por 12 eventos simples, cada uno de los 12 alumnos que se dedican al futbol; ya vimos que la probabilidad de que cada uno de ellos sea elegido es de: __________; y la probabilidad del evento F es:

$$P(F) = \_\_\_\_$$

o sea que podemos obtener la probabilidad de un evento sumando las probabilidades de los elementos o eventos simples que lo forman.

Si tenemos dos eventos mutuamente excluyentes, A y B, la probabilidad de que ocurra el evento A o B es igual a la probabilidad de que ocurra cualquiera de los eventos simples de uno u otro A o B, es decir:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Al evento A o B se le llama evento unión de A y B.

Encuentra la probabilidad de que el alumno elegido al azar por el subdirector juegue futbol o basquetbol. ______________

____

GLOSARIO

Eventos mutuamente excluyentes. Son dos o más eventos que no tienen ningún resultado simple o individual en común, y que no pueden ocurrir u observarse de manera simultánea.

Evento unión. Al evento A o B se le conoce como evento unión de A y B o la unión de ellos. Es el evento que comprende todos los eventos o resultados simples que están en A o en B, en cualquiera de los dos, o en ambos a la vez.

En otra de las preguntas del reto, el profesor de educación física desea conocer la probabilidad de que el alumno escogido del grupo 3° A practique basquetbol y natación. Por los datos del problema, sabemos que hay __________ alumnos que practican tanto el basquetbol como la natación. Por ello,

$$P(B \text{ y } N) = \_\_\_\_$$

En este caso, el evento nuevo se forma con el conectivo **y**; esto nos indica que comprende aquellos resultados simples que pertenecen a los dos eventos originales de manera simultánea; específicamente, forman parte del evento B y N los alumnos que se dedican tanto al basquetbol como a la natación. Esto se puede representar en el siguiente diagrama de Venn:

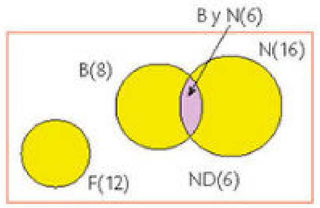


Figura 13.1

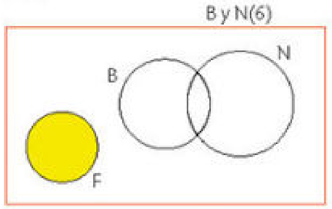
Intersección: B y N

GLOSARIO

Evento intersección. El evento A y B es el **evento intersección** de los eventos A y B (o la intersección de A y B) y comprende todos los resultados o eventos simples que forman parte de A y B a la vez. Su probabilidad es la suma de las probabilidades de dichos resultados simples.

En general, se dice que el evento A y B es el evento intersección de los eventos A y B –o la intersección de A y B– y comprende todos los resultados o eventos simples, que forman parte de A y B a la vez. Su probabilidad es la suma de las probabilidades de dichos resultados simples.

El último resultado para el profesor de educación física es la probabilidad de que el alumno que se escoja en el 3° A juegue basquetbol o natación. Este es el evento B o N, es decir, __________, que incluye todos los resultados simples que están en __________. En el siguiente diagrama, sombrea el evento B o N:



Unión: B o N

Figura 13.2

De acuerdo con los datos del problema, la probabilidad de este evento es $P(B \text{ o } N) =$ _____

¿Qué sucede si para calcular $P(B \text{ o } N)$ utilizas la expresión que obtuvimos arriba, para encontrar la probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes (sumando las probabilidades de ambos eventos)? Explica: __________

GLOSARIO

Probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes. Si tenemos dos eventos mutuamente excluyentes A y B, la probabilidad de que ocurra el evento "A o B" es igual a la probabilidad de que ocurra cualquiera de los eventos simples de uno y otro, A y B, es decir:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

¿Qué sucede con los alumnos que están en el evento intersección, "B y N"? Explica: __________

¿Los eventos B y N son mutuamente excluyentes? ¿Por qué? __________

En general, si tenemos dos eventos A y B que no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de su unión se obtiene por medio de la expresión siguiente:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Explica a uno de tus compañeros por qué esta expresión se utiliza cuando los eventos no son mutuamente excluyentes. __________

Al terminar esta sección, comparen sus resultados y comenten con su profesor.

UN NUEVO RETO

A continuación trabajen en equipos. En los libros anteriores han estudiado situaciones en las que se lanza un dado; ahora analizarán lo que sucede al tirar dos dados simultáneamente y aplicarán las ideas de esta lección relacionadas con la unión e intersección de eventos de un experimento aleatorio.

Al tirar dos dados, uno rojo y el otro blanco, encuentren las siguientes probabilidades; determinen en qué casos los eventos son mutuamente excluyentes:

- Que el número del dado rojo sea menor que cuatro o que en el dado blanco el número mostrado sea menor que tres ¿Cuál es la probabilidad de que estos eventos ocurran juntos?
- Que la suma de los dos números sea igual a siete o que la suma sea igual a 10. ¿Cuál es la probabilidad de observar juntos estos dos eventos?
- ¿Cuál es el evento complementario del último de los eventos mencionados (suma de ambos dados igual a 10)? ¿Cuál es su probabilidad?

¿Cuáles son los resultados o eventos simples de este experimento aleatorio y cuántos son? ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de ellos?

Para organizar la información sobre todos los resultados posibles, puedes completar una tabla como la 13.1; sabemos que cada dado por separado tiene __________ resultados posibles.

Resultado del dado rojo	Resultado del dado blanco					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)			
2						
3						
4						
5						
6						

Tabla 13.1

Con base en la tabla 13.1 (o cualquier otro procedimiento que hayas seguido), ¿cuántos son los resultados posibles del tiro de los dos dados? __________.

Suponemos que los dados no están desbalanceados; por ello, el resultado de cada lanzamiento de los dados depende sólo del azar. ¿Cuál será la probabilidad de cada uno de los resultados de la tabla? Explica tu respuesta. __________.

Con base en la información anterior, podemos retomar las preguntas iniciales. Por ejemplo, si llamamos W al primer evento:

W = {Número del dado rojo menor que cuatro}

De todos los resultados posibles, ¿cuáles corresponden al evento W? __________

¿Cuál es la probabilidad de que salga menos de cuatro en el dado rojo? $P(W) =$ __________

¿Por qué? __________

De manera similar vayan obteniendo las probabilidades de los diferentes eventos, y calculando las probabilidades de sus uniones, intersecciones o complementos, según se indica.

Comparen sus procedimientos y comenten con su profesor.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

Al terminar de resolver cada uno de estos ejercicios, comenten sobre los procedimientos y resultados con sus compañeros y profesor.

A. En el problema de la sección Reto, encuentra la probabilidad de los siguientes eventos:

- De que el alumno seleccionado de 3° A juegue basquetbol: incluye todos los que juegan basquetbol, sin importar si practican o no otro deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que no juegue basquetbol? Explica tu respuesta.
- De que el alumno practique la natación: no consideres únicamente a los que sólo practican natación, incluye también a los que practican natación y otros deportes. Obtén también la probabilidad de que no practique natación.
- De que el alumno practique basquetbol o natación.
- De que el alumno practique futbol y natación.
- De que el elegido practique basquetbol y ningún deporte.

B. Determina si los eventos son mutuamente excluyentes:

Si $P(A)= \frac{7}{12}$, $P(B)= \frac{3}{12}$ y $P(A \text{ o } B)= \frac{10}{12}$. ¿Cómo puedes describir los eventos A y B?

Si $P(A)= \frac{5}{16}$, $P(B)= \frac{9}{16}$ y $P(A \text{ o } B)= \frac{11}{16}$. ¿Qué puedes decir sobre los eventos A y B?

C. Para estimar cuánta madera puede haber en un bosque, el personal de una cooperativa maderera cuenta los árboles. En un terreno contaron los siguientes: caoba, 56; ébano, 69; cedro, 34 y pino, 21.
¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un árbol al azar en este terreno sea caoba o pino?
¿Cuál es la probabilidad de que el árbol seleccionado al azar sea caoba o ébano? ¿Y de que sea cedro o pino?
¿Son mutuamente excluyentes estos pares de eventos? Explica tu respuesta.

D. En el problema sobre las ventas de discos en la tienda El Súper Disco (lección 6), se entrevistó a 480 clientes, distribuidos de la siguiente manera:

Género del cliente	Tipo de música comprada				Total
	Rock	Clásica	En español	Otra	
Masculino	130	27	72	59	288
Femenino	70	33	48	41	192

Tabla 13.2

Se va a seleccionar al azar a uno de estos clientes. Encuentra las siguientes probabilidades:

- De que el cliente seleccionado haya comprado música en español; de que sea de género masculino; y de que no haya comprado música clásica.
- De que el cliente haya comprado música clásica o de otro tipo; de que haya comprado música clásica y de otro tipo.
- Que el elegido sea de género femenino o haya comprado un disco de rock.

Lectura

Probabilidad de la unión de dos eventos

Al calcular la probabilidad de la unión de dos eventos, se puede llegar al resultado absurdo de que la probabilidad es mayor que uno. Esto sucede cuando se cuentan mal los resultados simples, o si se olvida restar la probabilidad de la intersección de los eventos.

Por ejemplo, al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número menor o igual que cinco, o un número impar?

Si definimos:

$$A= \{\text{número menor o igual que cinco}\}= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B= \{\text{número impar}\}= \{1, 3, 5\}$$

tenemos que:

$$P(A)= \frac{5}{6} \quad \text{y} \quad P(B)= \frac{3}{6}$$

y si simplemente calculamos la probabilidad de la unión como la suma de las dos anteriores, obtenemos:

$$P(A \text{ o } B)= \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = 1.333$$

lo cual sabemos que no es posible; si a la suma anterior le restamos la probabilidad de la intersección, obtenemos:

$$P(A \text{ o } B)=$$

¿Y cuál sería la probabilidad de obtener un número o un número par? ¿Crees que se llegaría al mismo resultado o a uno diferente? ¡Inténtalo!

Comenten entre ustedes y con su profesor.

GLOSARIO

Probabilidad de la unión de dos eventos. En general, si tenemos dos eventos A y B que no necesariamente son mutuamente excluyentes, la probabilidad de su unión se obtiene por medio de la expresión siguiente:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la probabilidad de los eventos. Comenten en grupo su resumen.

Evaluación Bloque II

Evalúa lo que aprendiste en el bloque II, resolviendo los siguientes problemas.

Los factores del rectángulo

1. A un cuadrado (figura EII.1) se le aumentan 8 cm de largo y 3 cm de ancho, con lo que se forma un rectángulo (figura EII.2) cuya área es $\mathbf{x^2 + 11x + 24}$. Con base en esta información, realiza lo que se te pide:

Figura EII.1

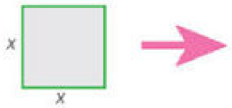


Figura EII.2

Las expresiones algebraicas que representan las dimensiones del rectángulo construido son (figura EII.2).

(A) Base: $x + 11$ Altura: $x + 1$ (B) Base: $x - 8$ Altura: $x - 3$

(C) Base: $x + 8$ Altura: $x - 3$ (D) Base: $x + 8$ Altura: $x + 3$

Si el área $\mathbf{x^2 + 11x + 24}$ es igual a 234 cm², ¿cuántos centímetros mide de largo y cuántos centímetros mide de ancho el rectángulo?

(A) Largo: 29 cm Ancho: 24 cm (B) Largo: 13 cm Ancho: 18 cm

(C) Largo: 18 cm Ancho: 13 cm (D) Largo: 7 cm Ancho: 2 cm

¿Cuántos centímetros mide por lado el cuadrado (figura EII.1)?

(A) 21 cm (B) 11 cm (C) 8 cm (D) 10 cm

Combinación de movimientos en el plano y Pitágoras

2. ¿Cuánto es lo mínimo que el triángulo equilátero debe girar sobre su centro para volver a coincidir en sus bordes?

(A) 30° (B) 60°

(C) 120° (D) 180°

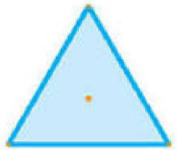


Figura EII.3

a) ¿Cuál es el vector que define la traslación del cuadrilátero I para formar el cuadrilátero II?

(A) a (B) b

(C) c (D) d

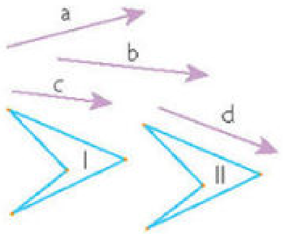


Figura EII.4

b) Utiliza traslación, rotación, simetría axial o simetría central para trazar un polígono II, congruente al polígono I:

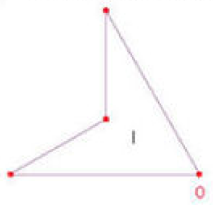


Figura EII.5

c) Escribe dos características de las siguientes transformaciones:

Rotación: ______________________

____

Simetría axial: ______________________

____

Simetría central: ______________________

____

3. ¿Cuánto mide el área del cuadrado menor?

(A) 4.5 m² (B) 18 m²

(C) 10.5 m² (D) 20.25 m²

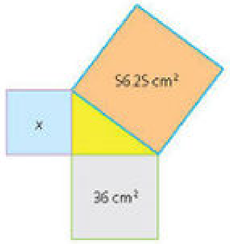


Figura EII.6

4. Se van a colocar tirantes para fijar mejor la torre de una antena de radio que mide 40 m de altura. Si las bases para los tirantes están a 30 m del pie de la torre y los tirantes van a ir hasta el extremo más alto de la torre, ¿cuánto deberán medir los tirantes?

(A) 100 m (B) 50 m

(C) 75 m (D) 40 m

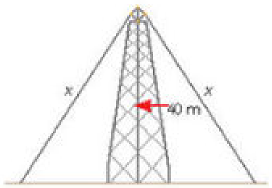


Figura EII.7

Por pura suerte

5. Josefina le ofrece a Mayra un chocolate relleno. No se puede ver el contenido de la bolsa. El número de chocolates de cada sabor de relleno es el que se muestra en la gráfica:

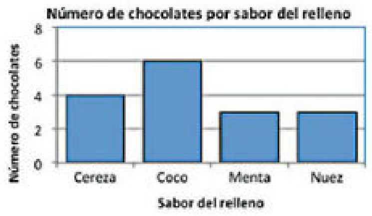


Figura EII.8

¿Cuál es la probabilidad de que el chocolate que seleccione Mayra tenga relleno de menta o cereza?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{7}{16}$

¿Cuál es la probabilidad de que el chocolate que seleccione Mayra tenga relleno de nuez y de coco? ______________________

Explica brevemente tu respuesta: ______________________

____

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de los contenidos de este bloque, el alumno:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Lección 14

¡Buen fin de semana!

Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Para recordar

Resuelve la siguiente ecuación por descomposición de factores:

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Compara tus resultados con tus compañeros y comenten cuál es el procedimiento que siguen para resolverla por este método.

RETO

Este fin de semana, la familia de Luis fue a la casa de campo de su tío, localizada en Cuautla, Morelos. El tío de Luis necesitaba conocer las dimensiones de su terreno, pero sólo sabía su área y, dada la geografía de éste, no era fácil medirlo. Después de caminar un rato por los linderos del terreno, Luis, siempre avispado, encontró un punto del jardín desde el cual pudo determinar que el terreno tenía 10 m más de largo que de ancho.

El terreno, según recuerda su tío, tiene un área de 875 m². ¿Cuáles son entonces sus dimensiones?

Pistas

Para ayudarte a resolver el problema, contesta las siguientes preguntas:

- Si llamamos x al ancho del terreno, ¿cuánto mide el largo? Exprésalo algebraicamente. En la figura 14.1 hay un dibujo que representa el terreno. Escribe sus dimensiones.

Figura 14.1

- Escribe la ecuación que representa el área del rectángulo. Compárala con las que obtuvieron tus compañeros.
- Resuelve la ecuación y discute con algunos compañeros si la solución encontrada tiene sentido en el contexto del problema.

Formalización

En las lecciones 1 y 8 resolviste ecuaciones de segundo grado con tus propios procedimientos o por factorización; sin embargo, no todas las ecuaciones pueden resolverse por estos métodos.

Ahora aprenderás un método que permite resolver cualquier ecuación cuadrática (que tenga solución), a partir de la forma canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En la *fórmula cuadrática* $b^2 - 4ac$ es llamado *discriminante*, y el tipo de soluciones de la ecuación depende del valor de esta expresión:

- Si $b^2 - 4ac$ es mayor que 0, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.
- Si $b^2 - 4ac$ es igual que 0, entonces tiene dos soluciones reales e iguales.
- Si $b^2 - 4ac$ es menor que 0, entonces las soluciones no son números reales.

En grupo, con tu profesor, discutan cuáles son los números reales y qué significa que la solución no sea un número real.

Antes de utilizarla debes recordar dos cosas:

- Escribir la ecuación en su forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$.
- Determinar los valores de a, b y c.

Comprueba lo anterior; determina qué tipo de solución tiene la siguiente ecuación, analizando su discriminante.

En la ecuación: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$a = 1 \quad b = -6 \; c = 8$

su discriminante es:

$$b^2 - 4ac$$
$$(-6)^2 - 4(1)(8)$$
$$36 - 32$$
$$4$$

como cuatro es mayor que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Verifiquemos resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)}$$
$$x = \frac{6 \pm 2}{2}$$
$$x_1 = \frac{8}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

En la ecuación $2x^2 + 4x + 2$, ¿cuánto vale su discriminante?, ¿cómo son sus soluciones? Compruébalo resolviendo la ecuación.

En parejas, resuelvan la ecuación $x^2 = -3x + 10$. ¿Cuánto vale su discriminante? ¿Cómo son las soluciones?

Es importante que al resolver una ecuación compruebes que la solución que obtienes la hagan verdadera.

En la ecuación $3x^2 + x + 1$, ¿cuál es el valor de su discriminante?, ¿cómo son las soluciones de esta ecuación? Compruébalo resolviendo la ecuación.

UN NUEVO RETO

En equipo resuelvan el siguiente problema:

Un ciclista recorre 70 km a cierta velocidad v. Si el ciclista disminuyera su velocidad 4 km/h, se tardaría 2 horas más en hacer el mismo recorrido. ¿Cuánto tiempo se tarda el ciclista en hacer su recorrido y a qué velocidad lo hace?

Para resolverlo contesten las siguientes preguntas:

- Si representamos con v la velocidad a la que va el ciclista y con t el tiempo que tarda en hacer su recorrido, subraya la expresión que representa la velocidad del ciclista.
  - $\frac{70}{v} = t$
  - $\frac{70}{t} = v$
  - $\frac{v}{70} = t$
- Encierra en un círculo la expresión que representa las condiciones del problema. Analiza cada una de las opciones y argumenten por qué es correcta o incorrecta.
  - $\frac{70}{t-2} = v + 4$
  - $\frac{70}{t+2} = \frac{70}{t} - 4$
  - $\frac{70}{t+2} = v - 4$
  - $\frac{70}{t-2} = \frac{70}{t} + 4$
- Expresen la ecuación en su forma general y resuélvanla con la fórmula.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

A. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determina su discriminante y analízalo para saber cómo son sus soluciones. Después resuelve la ecuación con la fórmula general para comprobar lo que determinaste.

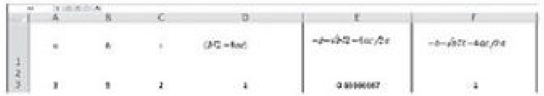
1. $x^2 - x - 20 = 0$
2. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
3. $x^2 + 7x + 4 = 0$
4. $9x^2 + 6x - 1 = 0$
5. $5x^2 + 9x + 4 = 0$
6. $6x^2 - 7x - 4 = 0$
7. $x^2 + 2x + 1 = 0$
8. $36x^2 - 24x + 4 = 0$
9. $-x^2 + 4x - 5 = 0$
10. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

Aplica las TIC

Como ya vimos, las ecuaciones cuadráticas pueden tener distintos tipos de soluciones, dependiendo del valor del *discriminante* $(b^2 - 4ac)$. Discute con tus compañeros y tu profesor por qué creen que es importante el valor de esta expresión en la solución de la ecuación.

Para analizar esto, utilicemos una hoja electrónica de cálculo, como la de la figura 14.2. Escribe las fórmulas correspondientes para obtener el discriminante y las dos soluciones de la ecuación. Si requieres ayuda, pregunta a tu profesor cómo escribir en la fórmula la raíz cuadrada, recordando que la raíz de un número también puede expresarse como una potencia:

Figura 14.2



Resuelve las siguientes ecuaciones en tu hoja electrónica de cálculo; observa todas las posibles soluciones del discriminante:

1. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
2. $5x^2 + x + 2 = 0$
3. $2x^2 - 4x + 1 = 0$
4. $6x^2 - 5x - 6 = 0$
5. $3x^2 - 2x + 4 = 0$
6. $x^2 + 2x + 5 = 0$
7. $8x^2 - 2x - 3 = 0$
8. $x^2 - 4x + 4 = 0$

Comenta con tus compañeros y tu profesor tus observaciones.

Lectura

El sumario compendioso

Sumario compendioso de las cuentas de plata y oro que en los reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y a todo género de tratantes: con algunas reglas tocantes a la aritmética, este es el largo título que Juan Díez Freyle puso a esta obra de aritmética y álgebra, que en 1556 publicó en la Nueva España, hoy Ciudad de México, con la intención expresa de evitar que se siguieran cometiendo fraudes mercantiles, al realizar operaciones matemáticas. Este libro es sin duda el primer texto matemático publicado en todo el continente americano. De los textos originales del sumario, sólo quedan tres o cuatro copias en todo el mundo, y todos fuera de México, pero se puede decir que esta ciencia, tan mal comprendida en nuestros actuales sistemas educativos, irradió al continente americano desde la capital de México. Este libro expone los conceptos que cualquier persona educada del siglo XVI necesitaba en su vida cotidiana. Era un manual de aplicación de la aritmética o álgebra de las actividades comerciales.

Texto adaptado de: *Sumario compendioso de las cuentas de plata y oro que en los reinos del Perú son necesarias alos mercaderes y a todo género de tratantes: con algunas reglas tocantes a la aritmética* Edición facsimilar: http://booksgoogle.com.mx/books?id=4mV512v0U2IC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas, mediante la aplicación de la fórmula general. Comenten en grupo su resumen.

Lección 15 Problemas con los triángulos

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Para recordar

En parejas, analicen los cuadriláteros y digan cuáles se pueden dividir en dos triángulos congruentes al trazar primero una diagonal y después la otra.

Después llenen la tabla 15.1. Utilicen iniciales para definir los criterios de congruencia: Lado, Lado, Lado (L,L,L); Lado, Ángulo, Lado (L,A,L); Ángulo, Lado, Ángulo (A,L,A).

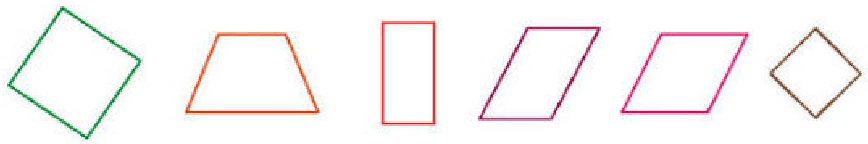


Figura 15.1

Nombre del cuadrilátero	Forma triángulos congruentes con una diagonal		Criterio de congruencia que apoya la afirmación	Forma triángulos congruentes con la otra diagonal		Criterio de congruencia que apoya la afirmación
	SÍ	NO		SÍ	NO	

Tabla 15.1

Comenten en el grupo cuándo sí y cuándo no es posible formar triángulos congruentes, al trazar independientemente las diagonales de un cuadrilátero.

➔ RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Se definen 4 triángulos, según sus lados, dos de ellos son congruentes y dos son semejantes, descúbranlos y trácenlos en su cuaderno. Las medidas de los lados no deben tener decimales.

Triángulo SOL	Triángulo MIO	Triángulo CAN	Triángulo PAN
Lado SO: 6 cm	Lado MI: $3x_1 + 2 = 38$	Lado CA: $3y_1 + 2 = 20$	Lado PA: $3z_1 - 2 = 16$
Lado OL: 3 cm	Lado IO: $5x_2 + 1 = 31$	Lado AN: $5y_2 + 1 = 16$	Lado AN: $5z_2 - 4 = 1$
Lado LS: 4 cm	Lado OM: $6x_3 - 4 = 44$	Lado NC: $6y_3 - 4 = 20$	Lado NP: $2z_3 + 4 = 16$

Tabla 15.2

¿Cuál de los triángulos es congruente al ΔSOL? ______

¿Por qué? ______

¿Cuál de los triángulos es semejante al ΔSOL? ______

¿Por qué? ______

¿Los triángulos que tienen igual perímetro son congruentes? ______

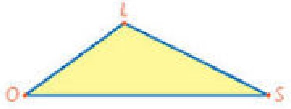
¿Por qué? ______

Comparen sus respuestas con otras parejas y, en caso de dudas, resuelvan los ejercicios en forma grupal.

Pistas

Tracen y recorten el triangulo SOL para tenerlo de modelo.

Figura 15.2



Una vez trazado el triángulo, busquen en los otros triángulos uno que sea congruente; pueden hacerlo de diferentes formas:

1. Resuelvan las ecuaciones y determinen si los resultados corresponden a cada uno de los lados del triángulo SOL.

Lado SO = 6 cm

Lado MI:	Lado CA:	Lado PA:
$3x_1 + 2 = 38$	$3y_1 + 2 = 20$	$3z_1 - 2 = 16$
$x_1 =$ ______	$y_1 =$ ______	$z^1 =$ ______

¿En cuál de las ecuaciones el valor de la incógnita corresponde a 6? ______

¿Ya pueden saber cuál es el triángulo congruente al ΔSOL? ______

¿Por qué? ______

Continúen con las otras ecuaciones para descubrir cuál es el triángulo congruente al ΔSOL.

Lado OL = 3 cm

Lado IO:	Lado AN:	Lado AN:
$5x_2 + 1 = 31$	$5y_2 + 1 = 16$	$5z_2 - 4 = 1$
$x_2 =$ ______	$y_2 =$ ______	$z_2 =$ ______

Pistas (*continuación*)

¿Ya pueden saber cuál es el triángulo congruente al ΔSOL? ______

¿Por qué? ______

Lado LS = 4 cm

Lado OM:	Lado NC:	Lado NP:
$6x_3 - 4 = 44$	$6y_3 - 4 = 20$	$2z_3 + 4 = 16$
$x_3 =$ ______	$y_3 =$ ______	$z_3 =$ ______

Según la medida de sus lados:

¿Cuál es el triángulo congruente al ΔSOL? ______

¿Por qué? ______

¿Cuál es el triángulo semejante al ΔSOL? ______

¿Por qué? ______

2. ¿Cómo se puede resolver el problema usando los perímetros?
   En los triángulos congruentes, ¿cómo son los perímetros? ______
   En los triángulos semejantes, ¿cómo son los perímetros? ______

Perímetro del ΔSOL:

P =

Perímetro del ΔMIO:

$3x_1 + 2 = 38$	$x_1 =$ ______
$5x_2 + 1 = 31$	$x_2 =$ ______
$6x_3 - 4 = 44$	$x_3 =$ ______
	P = ______ cm

Perímetro del ΔCAN:

Perímetro del ΔPAN:

Pistas (*continuación*)

Según la medida de sus perímetros:

¿Cuál es el triángulo congruente al ΔSOL? ______

¿Por qué? ______

¿Cuál es el triángulo semejante al ΔSOL? ______

¿Por qué? ______

¿Los triángulos que tienen igual perímetro son congruentes? ______

¿Por qué? ______

Tracen y recorten los triángulos y comprueben sus respuestas.

Escuchen las respuestas y opiniones de otros compañeros y pregunten, en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

Se llaman triángulos congruentes a aquellos que tienen la misma forma y tamaño. Son triángulos semejantes los que tienen la misma forma.

Triángulos semejantes

1. Dos triángulos son semejantes si dos pares de ángulos correspondientes son iguales (AAA).
2. Dos triángulos son semejantes si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos por ellos son congruentes (LAL).
3. Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales (LLL).

Hay tres criterios de congruencia para definir un triángulo en los que se estipulan los datos mínimos y necesarios para su construcción:

1. Un triángulo está definido si conocemos la medida de cada uno de sus tres lados (L L L).
2. Un triángulo está definido si conocemos la medida de dos de sus lados y la del ángulo que está entre ellos (L A L).
3. Un triángulo está definido si conocemos la medida de dos de sus ángulos y la del lado que está entre ellos (A L A).

No necesariamente los triángulos con igual perímetro son congruentes.

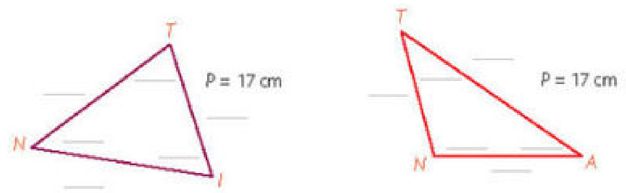


Figura 15.3

Los triángulos TIN y TAN tienen el mismo perímetro, pero NO son congruentes. Mide sus ángulos y sus lados y anótalos donde corresponda en cada triángulo.

La congruencia es un caso especial de la semejanza en la que se maneja una proporción de uno a uno 1:1.

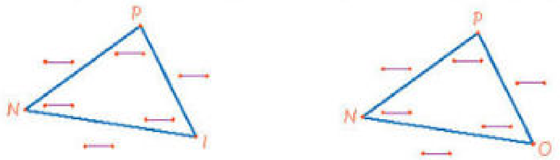


Figura 15.4

Mide y compara los ángulos en los triángulos PIN y PON, y escribe como fracción la proporción de los lados homólogos.

Analicen en grupo los casos de congruencia y los de semejanza de triángulos y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Utilicen el dibujo de la figura 15.5 y, con base en la información que se proporciona, contesten lo que se pide. Las distancias a, b son iguales.

¿Cómo son los triángulos ABO y ODC entre sí? ______

¿Por qué? ______

Si trazan la diagonal CE, ¿cómo son entre sí los triángulos ODC y DEC? ______

¿Por qué? ______

¿Qué dimensiones tiene el cuadrilátero? ______

¿Cuánto mide la distancia que hay desde el punto A hasta el punto C? ______

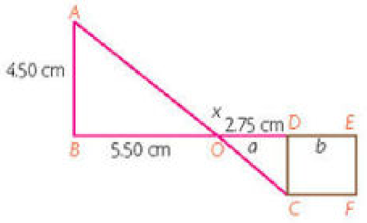


Figura 15.5

Expongan su trabajo en el grupo y, en caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. Comprueba la transitividad de la semejanza, trazándole al triángulo A un triángulo semejante B, y al B, uno semejante C. Finalmente, prueba que hay semejanza entre los triángulos A y C.

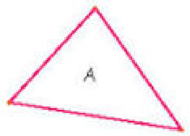


Figura 15.6

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

2. Escriban SÍ si los triángulos descritos son semejantes; y NO, si no lo son. Argumenten sus respuestas.
   a. Dos triángulos equiláteros ______ Porque ______
   b. Dos triángulos isósceles rectángulos ______ Porque ______
   c. Dos triángulos rectángulos ______ Porque ______
   d. Dos triángulos isósceles con dos ángulos iguales y uno de 40° ______ Porque ______

3. Escribe las medidas faltantes en los siguientes canales de riego. Los canales MN y PR son paralelos.

Canal x = ______ m

Canal y = ______ m

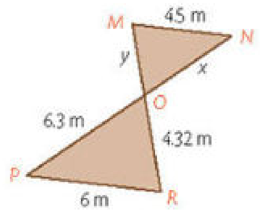


Figura 15.7

4. ¿Qué altura tiene la imagen que se forma en la cámara?

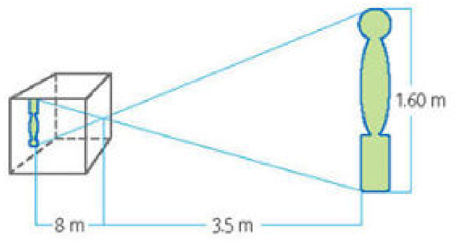


Figura 15.8

Aplica las TIC

Si cuentan con una computadora y algún software de geometría, realicen en equipo la siguiente investigación.

A. Tracen un triángulo cualquiera y llámenle LUZ.
   Configuren la computadora para que les indique las medidas de los lados de, por lo menos, dos ángulos. Les debe quedar algo así:

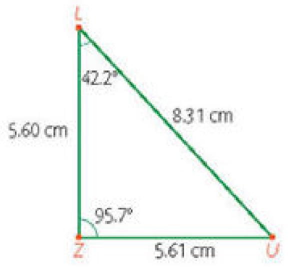


Figura 15.9

Aplica las TIC (*continuación*)

B. Marquen en cada lado un punto exterior al triángulo y configuren la computadora para que trace una paralela a cada lado, por cada uno de los puntos. Observen la imagen de la figura 15.9.

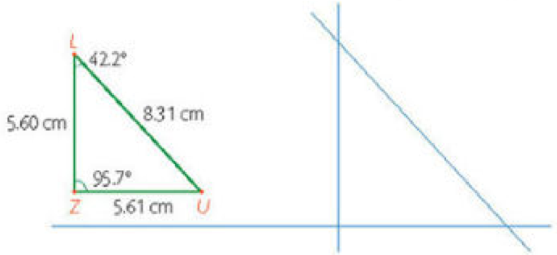


Figura 15.10

C. Marquen los puntos de intersección de las rectas, llámenles L'U'Z' para formar un triángulo semejante al ΔLUZ y tracen un triángulo que pase por dichos puntos. Después oculten las rectas y configuren la computadora para que muestre las medidas de los lados y de los ángulos homólogos del ΔL'U'Z'.

Figura 15.11

D. Configuren la computadora para que calcule la razón entre los lados homólogos de los lados. Muevan los vértices del ΔLUZ o los puntos sobre los lados del ΔL'U'Z' y observen cómo se conservan congruentes los ángulos correspondientes y la proporcionalidad entre los lados.

$\frac{LZ}{L'Z'} = 0.86$ $\frac{LU}{L'U'} = 0.86$ $\frac{ZU}{Z'U'} = 0.86$

Figura 15.12

E. Finalmente, muevan los lados del ΔL'U'Z' hasta que se forme un triángulo congruente al ΔLUZ. ¿Cómo son las razones resultantes? ______________________________

¿Se puede afirmar que todos los triángulos congruentes son a la vez semejantes? ______________

¿Por qué? ______________________________

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

El ojo y la semejanza

Una cámara fotográfica y un ojo funcionan de manera parecida. Observa en una cámara cómo la imagen del objeto que se va a fotografiar entra por el obturador, pasa por una lente y se forma al revés en el espacio en el que está ubicado el rollo fotográfico.

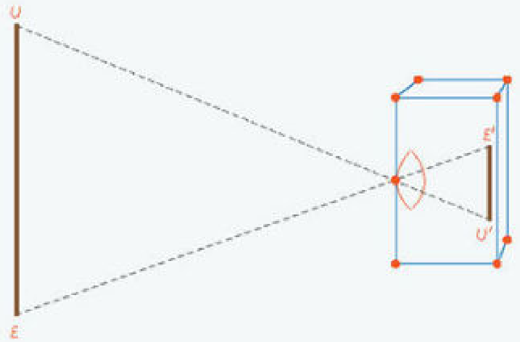


Figura 15.13

En un ojo, la imagen del objeto que se ve entra por un espacio que hay en el iris, llamado pupila. Luego pasa por una lente que se llama cristalino, y la imagen se forma al revés en el fondo del ojo, en un lugar que se llama retina.

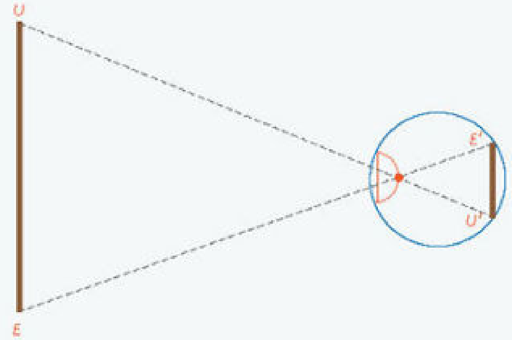


Figura 15.14

Esto quiere decir, que cada vez que vemos algo, nuestros ojos trabajan con la semejanza de figuras. ¡¿Cómo ves!?

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la identificación y aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la solución de problemas. Comenten en grupo su resumen.

Lección 16 Tales de Mileto

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

Para recordar

En parejas, sigan las instrucciones utilizando el triángulo NAR de la figura 16.1.

1. Tracen una recta paralela al lado AR que pase por el punto D.
2. Llamen O al punto de intersección de la recta con el lado NA del triángulo.
3. Identifiquen en la figura los triángulos ΔNAR y ΔNOD.

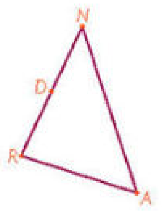


Figura 16.1

4. Midan los ángulos interiores de ambos triángulos y anótenlos dentro de cada triángulo.
   ¿Los triángulos formados son congruentes? ______
   ¿Por qué? ______
   ¿Los triángulos formados son semejantes? ______
   ¿Por qué? ______

Comenten en el grupo sus respuestas y, en caso de dudas, pregunten a su profesor.

RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Carmen tiene que resolver de tarea un problema que el griego Tales de Mileto resolvió hace miles de años.

Como parte de su trabajo, en clase dividió segmentos con distintos procedimientos.

Observen la figura 16.2 para que identifiquen qué métodos ha estado empleando, al dividir el segmento RE de 6 cm en tres partes iguales.

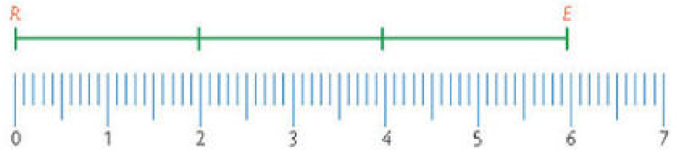


Figura 16.2

¿Qué procedimiento usó Carmen para dividir el segmento RE en 3 partes iguales? ______

Dividió en cuatro partes iguales el segmento DO de 7 cm. Observen la figura 16.3.

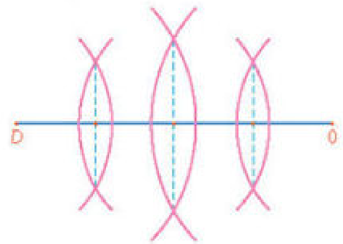
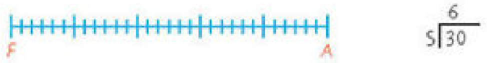


Figura 16.3

¿Qué procedimiento usó Carmen para dividir el segmento DO en cuatro partes iguales? ______

Al segmento FA de 3 cm lo dividió en cinco partes iguales (figura 16.4):

Figura 16.4



¿Qué procedimiento usó para dividir el segmento FA en cinco partes iguales? ______

Ahora ustedes dividan el segmento LA de 7 cm en cinco partes iguales (figura 16.5):

Figura 16.5

Dividan el segmento MI de 5 cm en siete partes iguales (figura 16.6):

Figura 16.6

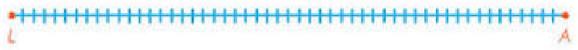
¿Les sirvió alguno de los procedimientos usados por Carmen para dividir los últimos dos segmentos? ______ ¿Cuál? ______

Comparen sus procedimientos con otras parejas y, en caso de dudas, resuelvan los ejercicios en forma grupal.

Pistas

Para dividir el segmento LA, usen el procedimiento que siguió Carmen para dividir el segmento FA.

Figura 16.7



¿Cuánto mide cada una de las partes en las que quedó dividido el segmento LA? Comenten en parejas cómo podrían usar una hoja rayada para dividir el segmento LA en 5 partes iguales. Escriban brevemente cómo lo hicieron. ______

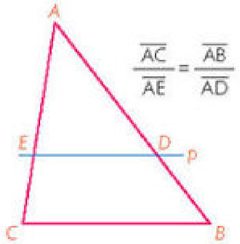
______

Escuchen las respuestas y opiniones de otros compañeros y equipos y pregunten, en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

Tales de Mileto formuló un teorema muy famoso que ahora lleva su nombre. El cual establece que:

> Si en un triángulo trazamos una paralela a uno de sus lados, de tal manera que corte a los otros dos, los puntos de corte determinan segmentos cuyas longitudes son proporcionales a las longitudes de dichos lados. (Figura 16.8).



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$

Figura 16.8

Escribe otras razones en el triángulo que cumplan con el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} =$ $\qquad$ $\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} =$

El recíproco a este teorema también es cierto, esto es:

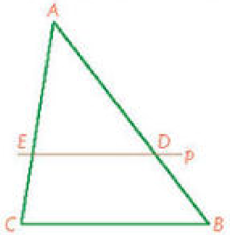


Figura 16.9

Si $\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

Entonces $\quad$ ED // CB
(que se lee ED es paralelo a CB)

Una consecuencia del teorema de Tales afirma que:

> Si dos o más rectas paralelas son cortadas por dos secantes, los segmentos correspondientes determinados sobre cada secante son proporcionales.

Lo puedes comprobar de la siguiente forma:

- Traza dos rectas: *t* y *a*.
- Traza tres rectas paralelas y llámales *l*, *e*, *s*; de modo que intersequen a las rectas *t*, *a* en los puntos A, B y C a la primera, y en A´, B´ y C´ a la segunda. Observa la figura 16.10.

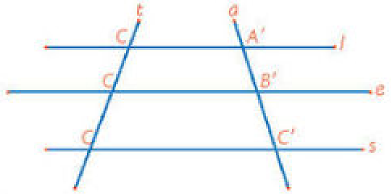


Figura 16.10

Mide los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{A'C'}$ y calcula el valor de las siguientes razones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \text{ y } \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$$

Una aplicación del teorema de Tales es que puedes dividir un segmento en N partes iguales, por ejemplo:

Dividir el segmento AB, de 7 cm, en cinco partes iguales. (Figura 16.11).

Figura 16.11

Traza una línea auxiliar sin importar la medida, y formando un ángulo mayor que 0° y menor que 180°.

- Con ayuda de tu compás, marca en la línea auxiliar el número de partes en las que se desea dividir el segmento dado; todas las marcas deben medir lo mismo (Figura 16.12).

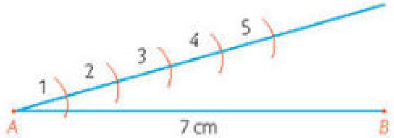


Figura 16.12

- Une la última marca con el extremo B del segmento y traza paralelas al segmento que une la última marca con B, por cada corte. Observa la figura 16.13.

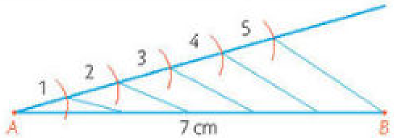


Figura 16.13

El segmento ha quedado dividido en cinco partes iguales.

Otra aplicación del teorema de Tales es:

Dividir un segmento AB en dos partes, de tal forma que cumplan con una razón dada, por ejemplo, que sea $\frac{3}{4}$ o 3:4.

Decimos que un punto *P* divide un segmento AB, en la razón *r*, si el cociente:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = r$$

Por ejemplo:

División del segmento TN en la razón $\frac{3}{4}$.

Figura 16.14

Hay que encontrar un punto O en el segmento TN, de tal forma que:

$$\frac{\overline{TO}}{\overline{ON}} = \frac{3}{4}$$

Suma el numerador y el denominador de la razón **3 + 4 = 7**, para dividir el segmento en ese número de partes congruentes.

- Traza un rayo en el extremo T del segmento TN y, con el compás, marca en el rayo siete segmentos congruentes.
- Une el extremo del último segmento marcado con el punto N.

- Traza una paralela al segmento anterior y que pase por el final del tercer segmento. Llama O al punto de intersección con el segmento TN.

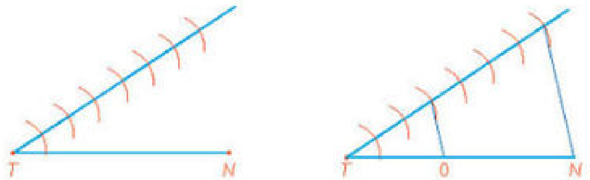
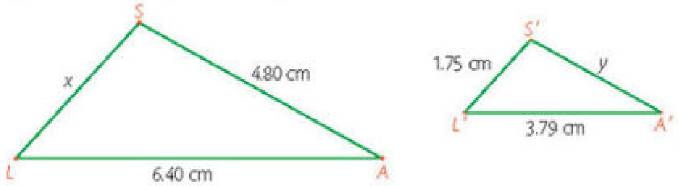


Figura 16.15

El punto O divide al segmento TN en la razón de $\frac{3}{4}$ o 3:4.
Otra aplicación es:
Conocer una medida faltante en figuras semejantes.



$$\frac{6.40}{3.49} = \frac{x}{1.75} \qquad \frac{4.80}{y} = \frac{x}{1.75} = \frac{6.40}{3.49}$$

Figura 16.16

¿Cuánto medirá *x*? ____________________
¿Cuánto medirá *y*? ____________________

Analicen en grupo las aplicaciones vistas del teorema de Tales y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Usen su juego de geometría para comprobar el teorema de Tales y prueben que:

Al trazar una recta paralela a uno de los lados de un triángulo forma, con los otros dos lados, un triángulo semejante (~) al original.

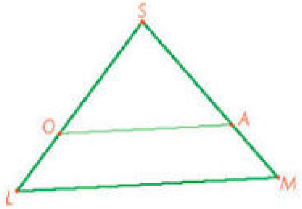


Figura 16.17

¿El triángulo SAO es semejante al triángulo SML? ____________________
¿Cómo deben ser los ángulos en ambos triángulos? ____________________
¿Cómo deben ser los lados SA, AO, OS del triángulo SAO con respecto a sus homólogos SM, ML, LS del triángulo SML? ____________________

Prueben con los otros dos lados:

¿ΔSML ~ ΔOAL? ¿ΔSML ~ ΔUMI?

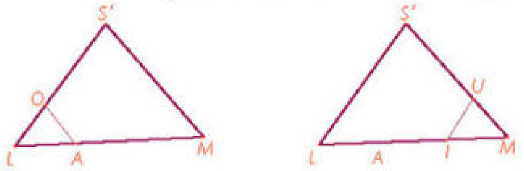


Figura 16.18

Si comprobaron que los triángulos son semejantes, probaron también que sus lados son proporcionales y probaron igualmente el teorema de Tales que dice:

> Si dos o más rectas paralelas son cortadas por dos secantes, los segmentos correspondientes determinados sobre cada secante son proporcionales.

En el caso de los triángulos:
¿Cuáles fueron las paralelas y cuáles las secantes? ____________________

Expongan su trabajo en el grupo y, en el caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. Calcula en cada triángulo la medida faltante. La línea que atraviesa a cada triángulo es paralela a uno de los lados.

$x =$ __________ $y =$ __________

Figura 16.19

2. Las líneas azules son paralelas; reproduce estos dibujos en tu cuaderno y encuentra relaciones de igualdad entre razones, usando tu conocimiento sobre el teorema de Tales.

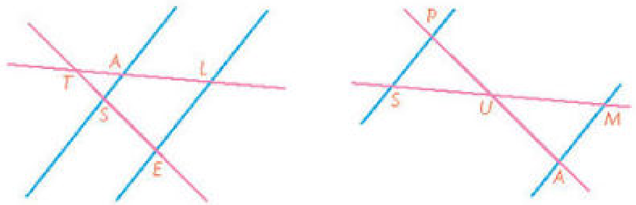


Figura 16.20

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

3. Divide en tu cuaderno un segmento de 9 cm en siete partes iguales y uno de 7 cm en nueve partes iguales.
4. Observa en la figura 16.21 cómo se dividió el mismo segmento en tres, cuatro, cinco partes iguales, usando una hoja de rayas.

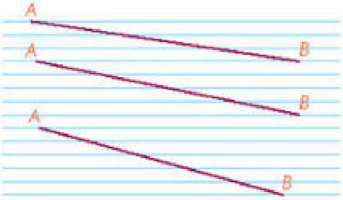


Figura 16.21

Usa una hoja rayada de tu cuaderno y divide un segmento de 7 cm en dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete partes iguales cada vez.

5. Describe cómo usar una hoja rayada de tu cuaderno para dividir un segmento en dos, tres, cuatro, cinco, seis, etcétera, partes iguales y explica por qué sucede esto. ______________________________

____

6. Divide el segmento AB en dos partes, tales que la razón entre las medidas de las dos partes sea:

a. 2:3 b. $\frac{2}{5}$ c. $\frac{4}{3}$ d. 2 a 7

Figura 16.22

Aplica las TIC

Si cuentan con una computadora y algún software de geometría, realicen en equipo la siguiente investigación para comprobar el teorema de Tales.

A. Tracen un triángulo cualquiera y llámenle TLS.

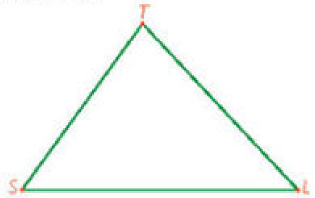


Figura 16.23

B. Tracen una paralela al lado TS que corte ambos lados del triángulo; llamen a las intersecciones de la recta con los lados A y E, respectivamente.

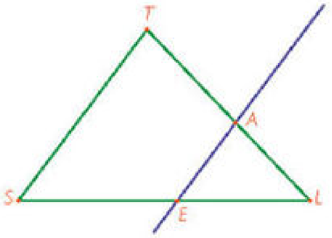


Figura 16.24

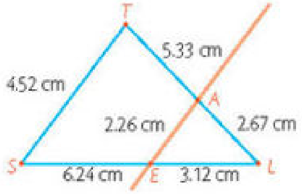
Aplica las TIC (*continuación*)

C. Midan las distancias de cada lado del ΔTLS y las del ΔALE.

D. Calculen y comprueben la equivalencia de las razones. Pueden usar una calculadora o el software de geometría.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \text{ y } \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$$

E. Muevan con el ratón el punto E y observen cómo se conserva la equivalencia de las razones.



TS/AE = 2.00
SL/EL = 2.00
TL/AL = 2.00

Figura 16.25

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

Tales, la filosofía y los negocios

A todas las aportaciones que Tales de Mileto hizo como la geometría, la filosofía, el álgebra, la óptica, etcétera, subyace la idea de que una observación sistemática y un pensamiento analítico son las herramientas que, combinadas, permiten explicar hasta los aspectos más insospechados de la realidad.

Se cuenta que algunos criticaban repetidamente a Tales por dedicarse a la filosofía, que consideraban inútil e improductiva y pensaban que era la causa de que el pensador de Mileto fuera tan pobre. Con el fin de demostrarles que estaban equivocados, Tales se dedicó a observar el clima y los astros durante algún tiempo, mientras reunía un poco de dinero. Luego, completamente fuera de la época de la cosecha de aceitunas, apartó todas las prensas que se utilizaban para obtener aceite, por la pequeña cantidad que había logrado reunir, pues nadie se interesaba en ese momento en ellas. Así, cuando la cosecha de aceitunas fue excepcionalmente abundante, cosa que Tales había anticipado gracias a sus observaciones, él pudo obtener una buena cantidad de dinero, rentando las prensas a quienes las necesitaban. Así demostró que los filósofos, los amantes del conocimiento, podían hacerse ricos, pero que no lo hacían simplemente porque eso no era lo que perseguían.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la identificación y aplicación del teorema de Tales en la solución de problemas. Comenten en grupo su resumen.

Lección 17

Homotecia y semejanza

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Para recordar

En parejas, sigan las instrucciones y contesten las preguntas:

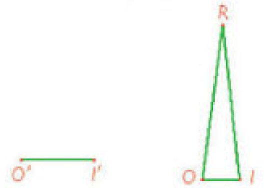


Figura 17.1

1. Tracen una recta paralela al lado RI, y que pase por el punto I'.
2. Tracen una recta paralela al lado RO, y que pase por el punto O'.
3. Llamen R' al punto de intersección de las rectas para que quede formado el triángulo R'I'O'.
4. Midan los ángulos interiores de ambos triángulos y anótenlos dentro de cada triángulo.
5. Comparen las razones entre los lados homólogos.

¿Los triángulos formados son congruentes? ____________

¿Por qué? ____________

¿Los triángulos formados son semejantes? ____________

¿Por qué? ____________

Comenten en el grupo las estrategias que usaron para trazar, medir y decidir el tipo de triángulos.

RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Isaac y Carmen fueron al cine. En la película, Carmen notó que en la ventanilla por donde sale la proyección se podía ver la película, pero más pequeña y al revés.

Al salir, Carmen le preguntó a Isaac si sabía por qué en las proyecciones de cine las escenas se ven grandes y semejantes a la película, que es pequeña y que además se coloca al revés.

Figura 17.2

¿Cómo podrían ayudar a aclarar las dudas de Carmen? ____________

¿Por qué se ve más grande la imagen? ____________

¿Por qué se coloca la película al revés y se ve bien en la pantalla? ____________

¿Cómo afecta la distancia a la que se encuentra la pantalla o el proyector para formar la imagen? ____________

¿Lo que se proyecta es siempre semejante al original? ____________

¿Por qué? ____________

Comenta con tus compañeros y profesor las respuestas a estas preguntas.

Pistas

Para tratar de comprender por qué las imágenes se ven grandes, hagan el siguiente experimento.

- Prendan en un cuarto oscuro una lámpara que refleje la luz en una sola dirección.
- Jueguen a formar figuras con sombras.
- Observen cómo varía el tamaño de las sombras conforme se acercan o se alejan los objetos de la fuente de luz, o se acercan y se alejan de la pantalla de proyección.

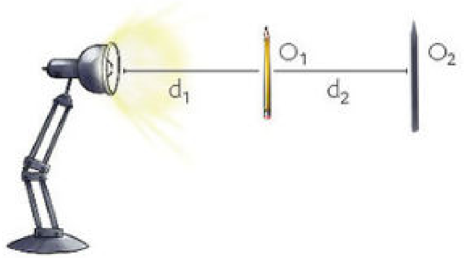


Figura 17.3

En el experimento midan:

Las distancias representadas como d_1 y d_2 y la longitud del objeto y su sombra representados como O_1 y O_2.

Encuentren las razones entre las variables d_1, d_2 y O_1, O_2 y anótenlas en su cuaderno.

¿Qué pasa con la sombra conforme acercan la fuente de luz al objeto? ____________

¿Cómo cambian las variables d_1, d_2 y O_2? ____________

¿Qué pasa con la sombra conforme alejan la fuente de luz al objeto? ____________

¿Cómo se transforman las variables d_1, d_2 y O_2? ____________

¿Cómo varían las razones? ____________

Usen las razones que anotaron en su cuaderno y verifiquen que la razón entre d_1 y d_2 es la misma que hay entre O_1 y O_2.

Elaboren en su cuaderno dibujos que representen el experimento.

¿Qué pueden concluir del experimento? ____________

Observen con una lente de aumento un objeto cercano. ¿Cambia la forma o el tamaño del objeto al verlo a través de la lupa? ____________

Observa con la lente un objeto lejano. ¿Por qué se ve al revés? ____________

Comenten con sus compañeros y profesor el experimento, también le pueden preguntar sus dudas a su profesor de física.

Escuchen las respuestas y opiniones de otros compañeros y equipos, y pregunten, en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

La homotecia es una transformación geométrica que nos ayuda a trazar figuras semejantes y también simétricas.

Observa cómo se aplica una homotecia al segmento AB:

Se marca un punto O cualquiera. Ver figura 17.4.

Figura 17.4

Se une A y B con el centro de homotecia O.

Se relacionan las distancias OA y OB con la unidad.

Se marcan sobre las líneas formadas puntos A' y B', por ejemplo, a tres unidades de distancia.

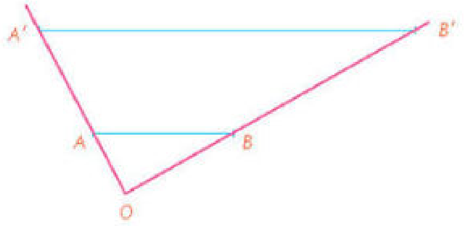


Figura 17.5

Si se aplica el teorema de Tales, se puede observar que las razones de homotecia que se forman son:

$$OA'/ OA = OB'/ OB = 3$$

Y por el teorema recíproco de Tales resulta que:

$$\overline{AB} \mathbin{//} \overline{A'B'}$$

Se aplicó al segmento $\overline{AB}$ una homotecia cuya razón es tres.

Compara el segmento $\overline{A'B'}$ con el segmento $\overline{AB}$.

¿Cuántas veces es mayor el $\overline{A'B'}$ que el original $\overline{AB}$? ____________________

¿Cómo crees que se podría trazar, con homotecia, un segmento A"B" de menor tamaño al AB?

____

Si se quiere de un tamaño específico, por ejemplo, la mitad de lo que mide el segmento $\overline{AB}$, ¿cómo se traza? ____________________

¿Se puede aplicar una homotecia a un polígono? ____________________

¿Cómo se puede aplicar la homotecia para formar figuras simétricas? ____________________

¿Y para formar figuras a escala? ____________________

¿Todas las figuras que se forman con las homotecias son semejantes? ____________________

¿El centro de homotecia puede estar dentro de la figura? ____________________

Observa las siguientes construcciones en las que se aplica la homotecia y estúdialas para disipar tus dudas.

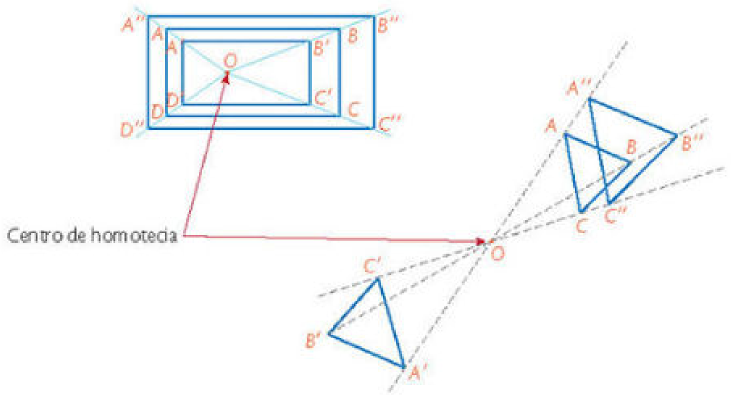


Figura 17.6

Cómo manejar el factor de homotecia:

- Observa las siguientes construcciones y escribe en tu cuaderno cómo se forman las figuras homotéticas respecto al centro de homotecia, dependiendo de si el factor es positivo o negativo.

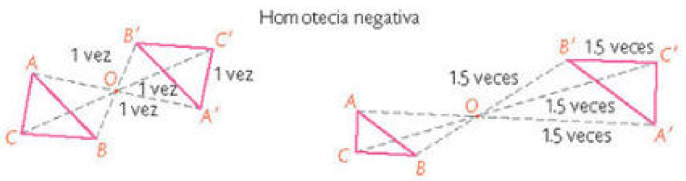


Figura 17.7

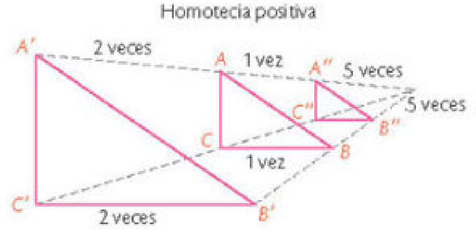


Figura 17.8

Escriban brevemente, cómo diferenciar una homotecia negativa de una positiva. ____________________

____

- El factor de homotecia indica cuántas veces se toma la distancia original, desde el centro de homotecia hasta cada uno de los vértices de la figura original, por lo que bastará medir la distancia original de cada vértice al centro de homotecia y multiplicarla por el factor de homotecia para conocer la nueva distancia a la que se ubicarán los nuevos vértices; la nueva figura formada crecerá o disminuirá en la misma proporción. Por eso las anotaciones en las distancias de las figuras anteriores.

Propiedades de las homotecias

Observa los ejemplos de esta lección o en trazos que hayas hecho al respecto, y comprueba las siguientes propiedades:

- Se conserva la colinealidad, es decir, si hay puntos alineados en la figura original, en las figuras homotéticas también lo estarán.
- Se conservan las medidas de los ángulos.

Analicen en grupo las diferentes formas de aplicar una homotecia y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

¿Recuerdan el aparato que se describe en la sección Lecturas: La escala de cabeza de la lección 2? Su funcionamiento ilustra perfectamente la homotecia.

Observen cómo hacer una versión más compleja del mismo aparato que les permita ver objetos de manera más clara.

Necesitarán lo siguiente:

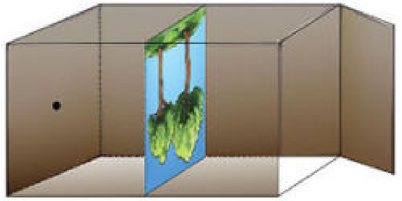


Figura 17.9

Materiales:

- 1 caja de aproximadamente 30 cm de largo por 20 cm de ancho y 20 cm de alto.
- 1 pliego de papel translúcido (albanene, china, micro, etcétera).
- Tijeras o cúter (recuerda proceder con mucho cuidado al manejar el cúter, dado que su filo puede causar graves cortaduras).
- Pegamento blanco o cinta adhesiva.

Observen en la figura 17.10 cómo quedará una vez construida.

Si consigues una caja como las que se usan para empacar huevo, podrás observar todavía mejor.

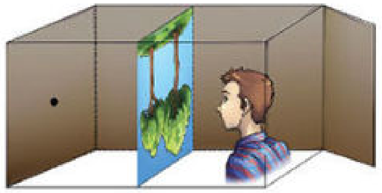


Figura 17.10

Para fabricar este aparato deben cortar la caja de manera similar a como se muestra en la figura 17.9. Observen que sólo se ha cortado en ella un cuadrado de 30 cm x 30 cm, que es suficientemente grande para meter la cabeza.

Siguiendo el principio de construcción del aparato de la sección Lectura La escala de cabeza, de la lección 2, peguen el papel translúcido a la mitad de la caja (observen la figura 17.9), con el fin de que sirva como pantalla.

Hagan un agujero con una aguja gruesa en la cara de la caja opuesta a la pantalla de papel.

Introduzcan la cabeza en el hueco que hicieron para tal fin, y apunten el aparato de homotecia hacia un objeto iluminado para que vean cómo se proyecta de cabeza.

En este caso se aprecia mejor la homotecia, porque el interior de la caja está oscuro.

Comenten con sus compañeros y contesten:

¿El factor de homotecia con el que trabajan las cajas será positivo o negativo? ____________

¿Por qué? ____________

¿Cómo podrían calcular aproximadamente el factor de homotecia usando la caja? ____________

Utilicen el modelo que hayan construido para observar alguna cosa a diferentes distancias y escriban en su cuaderno sus conclusiones.

Expongan su trabajo en el grupo y, en caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

A. Escribe dentro del paréntesis F, si la afirmación es falsa y V, si es verdadera.

1. Las rectas se transforman en curvas cuando les aplicas una homotecia. ( )
2. En la homotecia los ángulos crecen. ( )
3. En las homotecias se conservan los ángulos. ( )
4. En las homotecias las paralelas dejan de serlo. ( )
5. En las homotecias se pierde la perpendicularidad. ( )
6. En la homotecia se conserva la colinealidad. ( )
7. Dependiendo del factor de homotecia que uses, se conservan las distancias, los ángulos y la colinealidad. ( )
8. Si observas un ángulo de 25° con una lente que aumente al doble, el ángulo se ve de 50°. ( )

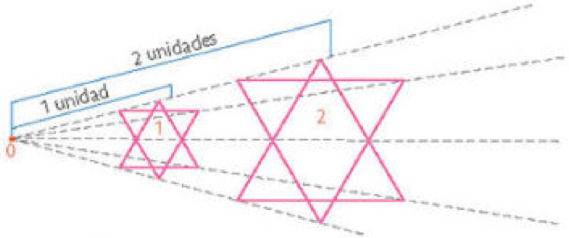


Figura 17.11

¿La estrella 1 está a escala $\frac{1}{2}$ de la estrella 2? ____________

¿La estrella 2 está a escala 2 a 1 de la estrella 1? ____________

B. Haz los siguientes trazos en tu cuaderno:

1. Dibuja un triángulo, decide un centro de homotecia y aplica un factor de 0.5 a la figura.
2. Dibuja un triángulo, decide un centro de homotecia y aplica un factor de −1 a la figura.

C. Aplica dos homotecias al cuadrilátero para hacerlo una vez mayor y otra menor.

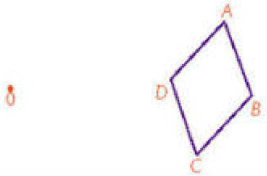


Figura 17.12

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

D. Utiliza la homotecia para que la figura resultante quede girada 180° respecto a la original.

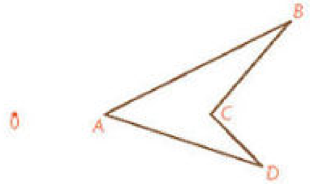


Figura 17.13

E. Dibuja en tu cuaderno un polígono y utiliza la homotecia para trazar otros dos polígonos semejantes; uno a escala 1:2 y otro a escala 2:1.
F. Investiga cómo aplicar la homotecia para trazar un círculo que sea el triple de otro dado.
G. Pregunta a tu profesor de física cómo usar las lentes para aumentar o disminuir la imagen de un objeto, y coméntalo en el grupo.
H. Observa una telaraña y trata de descubrir una homotecia.

Comenta tus respuestas con tus compañeros y, en caso necesario, resuelvan algunos ejercicios en el pizarrón.

Aplica las TIC

Usa alguna aplicación de geometría para trazar figuras con homotecia.

1. Traza el polígono de tu preferencia.
2. Marca un punto fuera del polígono, el cual será el centro de homotecia.
3. Selecciona Edición numérica y marca un número, por ejemplo dos.
4. Selecciona el comando Homotecia.

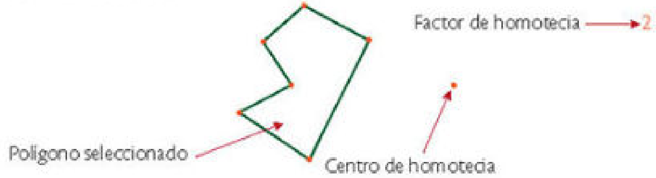


Figura 17.14

5. Selecciona el polígono, después el centro de homotecia y, finalmente, el factor de homotecia. Aparecerá otro polígono semejante al primero.
6. Para que comprendas mejor qué pasa con los vértices del polígono, une con segmentos punteados los vértices homólogos.

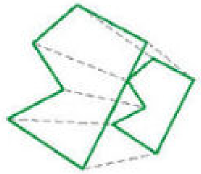


Figura 17.15

7. Arrastra el centro de homotecia en diferentes posiciones, incluso dentro del polígono, y observa lo que sucede.

Aplica las TIC (*continuación*)

8. Cambia el factor de homotecia a 1, 0, −1 y también hazlo con números fraccionarios positivos y negativos; observa cómo cambia el tamaño y la posición del polígono homotético.

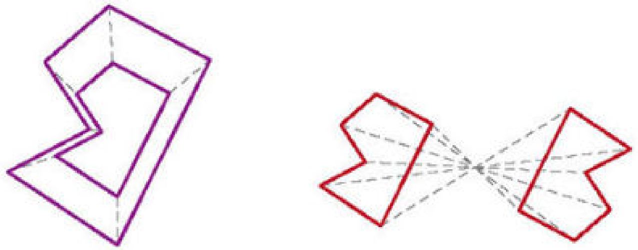


Figura 17.16

Escribe en tu cuaderno las observaciones al ejercicio y compáralas con las de tus compañeros

Lectura

El telescopio del Monte Palomar

En Monte Palomar, en el estado de California y cerca de la ciudad de Los Ángeles, en Estados Unidos, se encuentra un telescopio de reflexión, cuyo espejo mide 5 m de diámetro y con el que se han podido observar y fotografiar galaxias situadas a miles de millones de años luz de distancia de la tierra.

El telescopio de reflexión está formado por un espejo esférico gigante, frente al cual se encuentra una lente convergente.

Un telescopio de refracción está formado por una lente objetivo, una lente convergente y un mecanismo de relojería que lo mantendrá en movimiento para contrarrestar el movimiento de rotación de la tierra.

Figura 17.17

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la aplicación de la homotecia para trazar figuras semejantes. Comenten en grupo su resumen.

Lección 18

¡Todos a saltar!

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Para recordar

Resuelvan lo siguiente por equipos.
Rocío tiene en su cuenta de ahorro \$3 500 y ha decidido ahorrar cada mes \$500.
¿Qué cantidad tendrá después de tres meses? ____________

Figura 18.1

¿Cómo obtienes, a partir de la gráfica, el total que lleva ahorrado Rocío en cualquier mes? ____________

¿Cuáles son las variables en esta situación? ____________
¿De qué tipo es la relación entre las variables? ¿Por qué? ____________

¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre estas variables? ____________

Comparen y comenten sus respuestas en el grupo y con su profesor.

RETO

En la gráfica siguiente se muestra la relación entre el tiempo y la distancia de la caída en el bungee jumping o puentismo (ver datos del problema en la lección 5):

Por equipos, y con base en esta gráfica, contesten lo siguiente:

- ¿Cómo puedes saber la distancia que ha caído el deportista, en cualquier momento de su salto? Explica. ____________
- ¿Entre qué valores de las variables se ubica la gráfica? ____________
- ¿La distancia de caída aumenta o disminuye a medida que pasa el tiempo? ____________
- ¿Cómo son los incrementos en distancia recorrida por cada segundo que transcurre?, ¿son iguales o van cambiando? ____________
- ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la distancia que cae el deportista? ____________

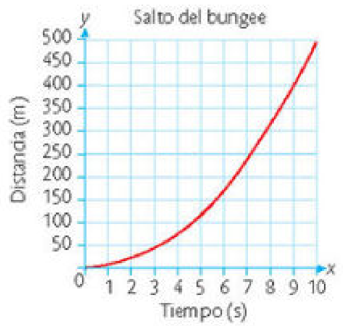


Figura 18.2

Compartan información sobre la altura desde la que suelen lanzarse los que practican este deporte. Comparen y comenten con su profesor sus observaciones sobre la gráfica.

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden ser útiles para resolver el reto.

- ¿Qué pasos sigues para obtener un dato específico a partir de una gráfica?
- ¿Qué tipos de relaciones entre variables recuerdas?, ¿cómo son sus gráficas?, ¿cómo son los incrementos en las gráficas de otras situaciones, son constantes o varían?
- Revisa tus datos sobre este problema en la lección 5, ¿qué diferencia hay entre los datos de la gráfica y los que obtuviste en tu tabla en esa lección?

Formalización

En la situación de los ahorros de Rocío, al inicio de la lección, la relación entre las variables se conoce como: ____________

La situación del bungee jumping es otro tipo de relación entre variables:

- ¿Cuál es la forma de las gráficas en la situación del bungee jumping y en las relaciones lineales, como en los ahorros de Rocío? Explica las diferencias. ____________
- Escribe las expresiones algebraicas para las situaciones de los ahorros de Rocío y del bungee jumping. Compáralas, observa las diferencias y comenta con tus compañeros ____________

En el caso del bungee jumping, la relación entre tiempo y distancia de la caída se conoce como una relación cuadrática, o se dice que existe una relación de variación cuadrática entre ellas:

- A la expresión algebraica $y = ax + b$ para las relaciones lineales se le conoce como el modelo general para todas las situaciones donde existe ese tipo de relación entre las variables.
- En las relaciones cuadráticas, el modelo o la forma general de la expresión algebraica es $y = ax^2 + bx + c$; x, y representan a las variables; a, b, c son números o valores específicos de cada situación; en estas expresiones, una de las variables (la independiente) está elevada al cuadrado.

GLOSARIO

Relación de variación cuadrática
La relación entre dos variables se dice que es **cuadrática** o si dicha relación puede representarse por medio de una expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + bx + c$ (x, y representan a las variables; a, b, c son números o valores específicos de cada situación).

¿Cuáles son los valores específicos de *a*, *b* y *c* para la situación del bungee jumping? Explica. ________

La gráfica de una relación cuadrática se construye de manera similar a las de relaciones lineales.

x	–3	–2	–1	0	1	2
y						

Tabla 18.1

- Ahora, ubica los puntos en un plano cartesiano y traza la gráfica de la relación. Utiliza tu cuaderno.

La siguiente gráfica corresponde a una relación cuadrática:

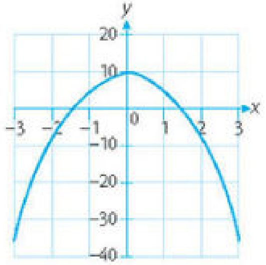


Figura 18.3

En esta gráfica se puede observar lo siguiente:

- ¿Para qué valores de *x*, la gráfica es creciente (aumenta o crece, a medida que aumenta *x*) y para cuáles es decreciente? ________
- ¿Para qué valores de *x*, la gráfica es positiva (los valores de *y* son positivos, es decir, que la gráfica está por arriba del eje de las *x*) y para cuáles es negativa? ________
- ¿Para qué valor de *x*, la gráfica tiene un máximo o un mínimo (donde la *y* alcanza su mayor o menor valor) y cuál es ese valor? ________

Compara y comenta los resultados con tus compañeros y tu profesor.

UN NUEVO RETO

Resuelvan lo siguiente por equipos.

Don Cipriano quiere construir un corral rectangular, en un terreno, dentro de su rancho. Cuenta con material para levantar una cerca de 40 metros de largo; quiere saber qué dimensiones debe tener el corral, para que tenga la mayor superficie posible.

Su sobrino Manuel, que estudia la secundaria, le va a ayudar.

Empieza por trazar un croquis:

Altura: ________

Perímetro: ________

Área: ________

Base: *x*

Figura 18.4

¿Cuál va a ser el perímetro del corral? ________

Con referencia al dibujo de Manuel:

- ¿Cuál es la expresión para la altura del rectángulo? ________

- ¿Cuál es la expresión algebraica para el área del corral, en función del largo de la base? ________

Con base en la expresión algebraica anterior, elaboren una tabla que contenga al menos siete pares de valores, que representen la relación entre las variables. Utilizando estos pares de valores, tracen la gráfica que represente la relación entre el largo de la base y el área del corral.

Observa la gráfica que obtuviste:

¿Para qué valores o largo de la base es creciente el área del corral? ________

¿Para qué valores de la base decrece el área del corral? ________

¿Para qué largos de la base es positiva el área del corral? ________

¿La gráfica tiene un mínimo o un máximo?, ¿para qué valor de la base? ________

¿Cuál es el valor máximo que puede llegar a tener la superficie del corral?, ¿cómo lo obtienes? Explica. ________

Con base en el análisis de esta gráfica, ¿qué le puede recomendar Manuel a su tío, sobre las dimensiones que más le convienen para el corral? ________

Comparen sus resultados y procedimientos, y comenten con su profesor.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

Al terminar con cada uno de los ejercicios siguientes, compartan resultados y procedimientos, y comenten con su profesor.

A. Traza la gráfica que representa la relación entre las variables de la tabla 18.2:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	13	3	–3	–5	–3	3	13

Tabla 18.2

Determina para qué valores de *x*:

- La variable dependiente y es creciente y para cuáles es decreciente.
- La variable *y* tiene signo positivo y para cuáles, signo negativo.
- *y* tiene un máximo o un mínimo de la variable dependiente.

Encuentra la expresión algebraica que relaciona estas variables.

B. Elabora una descripción de la siguiente gráfica (figura 18.5) de la relación entre las variables *s* y *t*.

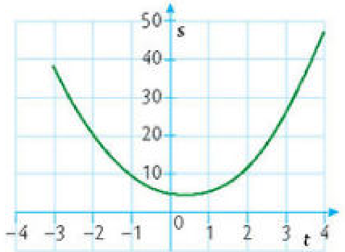


Figura 18.5

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

C. Gabriela y Leonel quieren elaborar pizzas para venderlas. Para empezar, hicieron una de 50 centímetros de diámetro, y en su elaboración ocuparon 500 gramos de masa. Deciden hacer pruebas con pizzas de varios diámetros, porque quieren ofrecer a sus clientes varios tamaños. También deben calcular cuánta masa van a necesitar. En sus pruebas observaron lo siguiente:

Diámetro de la pizza (cm)	30	40
Cantidad de masa (g)	180	320

Tabla 18.3

La cantidad de masa necesaria para elaborar una pizza, ¿depende del tamaño de la pizza, o éste no se relaciona con la cantidad de masa? Explica tu respuesta.
¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona estas dos variables?
Elabora la gráfica correspondiente y descríbela.

D. En la escuela se está llevando a cabo un torneo de basquetbol. Al iniciar cada partido, todos los elementos de un equipo saludan a todos los miembros del otro. Si cada equipo tiene diez jugadores, ¿cuántos saludos se realizan?

Encuentra la expresión algebraica que relaciona el total de saludos y con el número de jugadores x de uno de los equipos, y donde el otro equipo tiene dos jugadores menos.

Elabora una tabla y una gráfica que representen la relación entre las variables de esta situación. Describe las principales características de la gráfica que obtengas.

Aplica las TIC

A. Es posible utilizar una hoja electrónica de cálculo para trazar la gráfica que corresponda a los datos contenidos en una tabla. Los pasos descritos a continuación te servirán como guía:

1. Introduce en una hoja electrónica de cálculo en tu computadora, los datos de las tablas 18.4 y 18.5:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−9.5	−7.5	−5.5	−3.5	−1.5	0.5	2.5

Tabla 18.4

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Tabla 18.5

2. Selecciona las celdas con los datos de la variable y de la primera tabla (18.4) (para elaborar la gráfica correspondiente a la otra tabla (18.5), se repite el procedimiento). No incluyas la celda donde está la literal.
3. Abre el menú Insertar, submenú Gráficas Línea, selecciona la primera opción, la de líneas más sencilla (ésta y las instrucciones subsiguientes pueden variar según la hoja electrónica de cálculo que utilices).
4. Al aparecer la primera versión de la gráfica, da clic en el eje horizontal, da clic derecho, y clic en Seleccionar datos, Editar etiquetas del eje horizontal; después ve a la hoja electrónica de cálculo y selecciona las celdas donde están los valores de la variable x; los códigos de estas celdas deben aparecer en la ventana Rótulos del eje. Da clic en Aceptar, Aceptar.

Aplica las TIC (*continuación*)

5. De nuevo da clic en el eje horizontal, clic derecho, selecciona Dar formato al eje; en la sección Eje vertical cruza selecciona:
   - En marcas de graduación.
   - En categoría número, escribe la correcta para que el eje y pase por $x = 0$.
6. Completa el diseño de tu gráfica, introduciendo su título y los de los ejes; no incluyas leyendas, rótulos de datos ni tabla de datos.

¿Qué tipo de relación existe entre las variables de las dos tablas? Describe las gráficas. Comparen sus observaciones y coméntenlas con su profesor.

Lectura

¿Ecuaciones para meter goles?

La forma general de una relación cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes. La gráfica de las relaciones que hemos visto es una curva que se conoce como parábola.

Tales curvas se encuentran frecuentemente en situaciones reales:

- En los deportes, la trayectoria descrita por la bola o pelota enviada a una distancia relativamente larga (por ejemplo, en béisbol, basquetbol o futbol) es una parábola.

¿Puedes mencionar otras situaciones donde se observen parábolas?

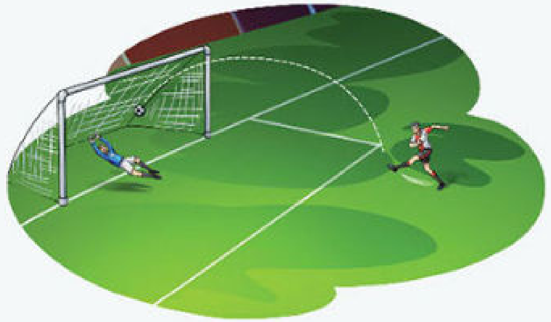


Figura 18.6

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la lectura y trazos de gráficas de funciones cuadráticas. Comenten en grupo su resumen.

Lección 19

Es cuestión de resistencia

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Para recordar

Miguel tiene un auto muy veloz: llega a los 100 km/h en tan sólo 6 segundos. La distancia recorrida por el auto se muestra en la siguiente gráfica. Ver figura 19.1

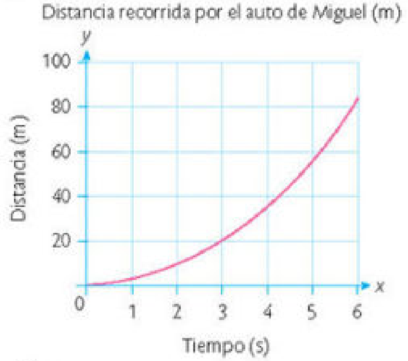


Figura 19.1

Por equipos, describan la gráfica. ______________________________

Comparen lo que los equipos observaron y comenten con su profesor.

RETO

Dante y Óscar participaron en la carrera de 200 metros planos durante las recientes competencias deportivas escolares. Se registraron con detalle las distancias y los tiempos de cada uno. Los profesores de educación física y matemáticas resumieron esa información en las tablas y gráficas siguientes:

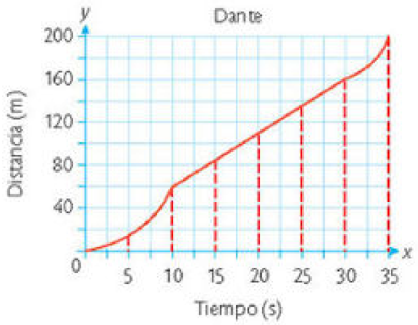


Figura 19.2 Gráfica de tiempos de Dante.

Tiempo (s)	5	10	15	20	25	30	35
Distancia (m)	14	60	85	110	135	160	200

Tabla 19.1

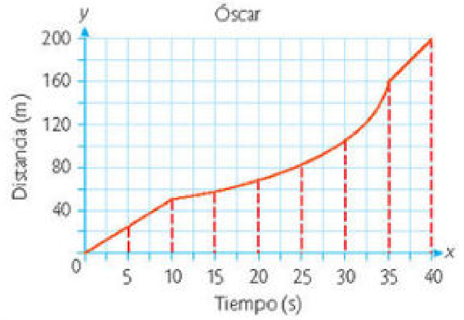


Figura 19.3 Gráfica de tiempos de Óscar.

Tiempo (s)	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (m)	25	50	56	66	81	104	160	200

Tabla 19.2

Los profesores quieren saber si estas tablas y gráficas muestran quién corrió más rápido y si permiten determinan en qué intervalos de tiempo Dante y Óscar avanzaron a una velocidad constante y en qué momentos la aumentaron o disminuyeron.

En el grupo hay opiniones divididas al respecto. ¿Tú, qué dices? ¿Qué información puedes obtener con estos datos? ______________________________

Comenten en el grupo las conclusiones que cada quien haya obtenido de gráficas y tablas acerca de cómo corrieron cada uno de estos atletas; comuníquenlo a su profesor.

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden ser útiles para resolver el reto.

- ¿Corrió Dante a la misma velocidad durante toda la carrera? ______________________________
  ¿Y Óscar? ______________________________
- ¿Qué significan las diferentes formas de las gráficas? ______________________________
  ______________ ¿En qué intervalos de tiempo cambian? ______________________________
- ¿Cómo empezó y cómo terminó Óscar su carrera, a velocidad constante o aumentándola?
  ____
  ¿Y Dante? ______________________________
- En iguales intervalos de tiempo, ¿Dante recorre siempre la misma distancia? ______________
  ¿Y Óscar? ______________________________

Formalización

Vemos que las dos gráficas incluyen unas partes con líneas curvas y otras con líneas rectas. ¿Qué significa eso? Explica. ______

Obtén la distancia recorrida por Dante cada cinco segundos, para ver cómo es la relación entre su tiempo y distancia recorrida (usa tu cuaderno).

¿En qué partes de la carrera Dante avanzó la misma distancia cada 5 segundos? ______

¿En qué partes de la carrera avanzó diferentes distancias por cada 5 segundos? ______

Describe la carrera de Dante, separando los tramos donde corrió a velocidad constante y donde fue acelerando. Por ejemplo:

Dante fue aumentando su velocidad durante ______; las distancias que cubría fueron cada vez ______ en ese lapso. Después, su velocidad fue ______ entre ______. Finalmente, en los últimos ______ segundos ______

Describe cómo fue la carrera de Óscar, de manera similar a como lo hiciste con la de Dante. ¿Quién de los dos corrió más rápido los 200 m? Obtén las velocidades en los diversos tramos en que ambos avanzaron a velocidad constante.

¿Qué diferencias encuentras? ¿Cuál fue el tramo que se corrió más rápido? ______

En las partes de su carrera donde Dante avanzó la misma distancia cada 5 segundos. ¿Cómo es la gráfica? ______

En las partes de su carrera donde Dante avanzó diferentes distancias cada 5 segundos. ¿Cómo es la gráfica? ______

Si la relación entre las variables es diferente. ¿Cómo cambia la forma de su gráfica? Explica brevemente. ______

Comenten entre ustedes y con su profesor.

UN NUEVO RETO

El tanque de agua mostrado en la figura 19.4 se encuentra inicialmente vacío. Recibe líquido a una velocidad constante.

La altura del nivel del agua aumenta a medida que pasa el tiempo. El incremento de dicho nivel, representado por y, ¿es constante con el tiempo? Si se representara en una gráfica, ¿qué forma tendría ésta?

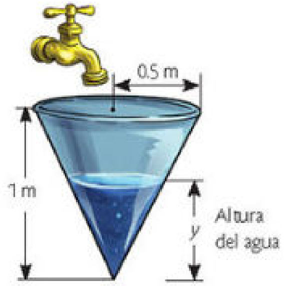


Figura 19.4

Hay otro tanque con una parte cilíndrica colocada arriba de un tanque cónico, como el de la figura 19.4, y con el mismo diámetro en su parte superior, como se muestra en la figura 19.5.

¿Cómo es ahora la gráfica de altura del agua contra tiempo, si le va cayendo el líquido al mismo ritmo?

Veamos primero el tanque cónico. ¿La cantidad de agua que entra en éste es la misma o es diferente en cada periodo de tiempo? ______

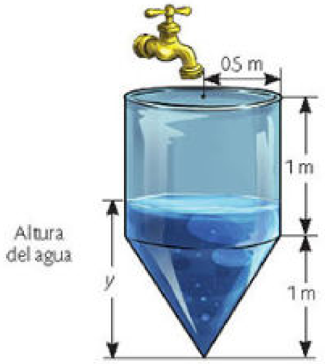


Figura 19.5

¿Cuál de las siguientes gráficas de la figura 19.6 será la representación más adecuada de cómo va avanzando el nivel del agua? Explica. ______

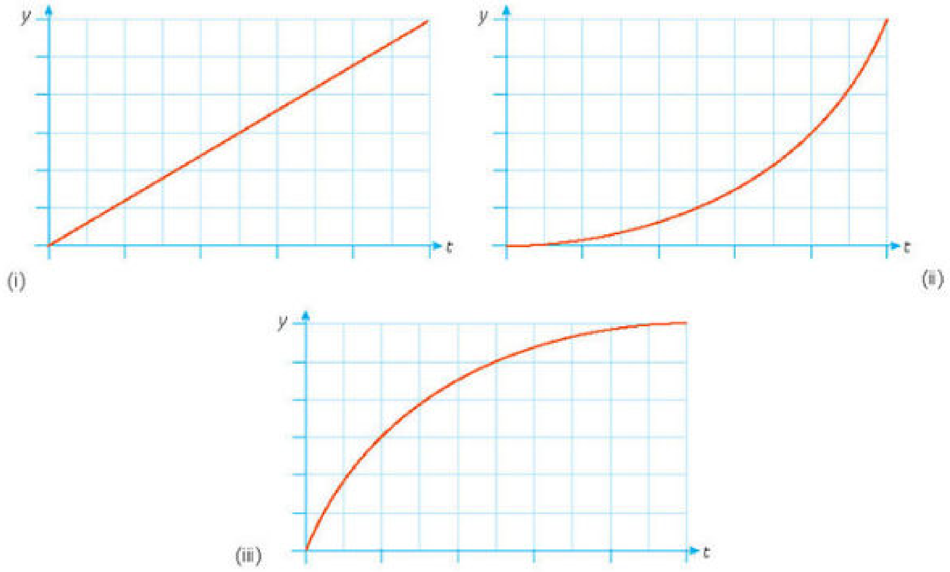


Figura 19.6

En la parte de forma cilíndrica, analiza el avance del agua y determina la forma de la gráfica que representa cómo varía el nivel del agua en esta parte del tanque; utiliza tu cuaderno.

Dibuja en los siguientes ejes cartesianos de la figura 19.7 cómo va a cambiar con el tiempo el nivel del agua, incluyendo las dos partes del tanque: cónica y cilíndrica.

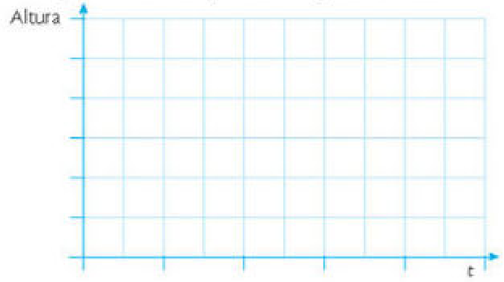


Figura 19.7

Comenten sobre sus procedimientos y resultados con su profesor.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

Al terminar con uno de los ejercicios siguientes, comparen sus resultados y procedimientos, y comenten con su profesor.

A. Describe el movimiento de un autobús que se representa por medio de la siguiente gráfica. Utiliza los intervalos de tiempo señalados.

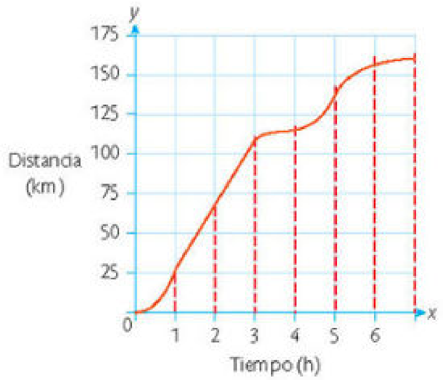
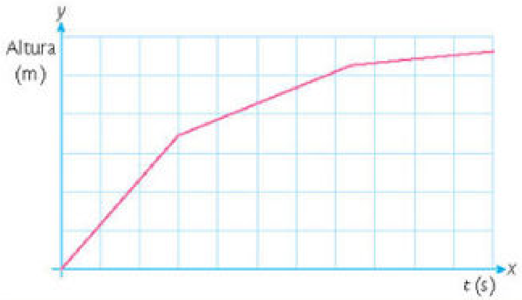
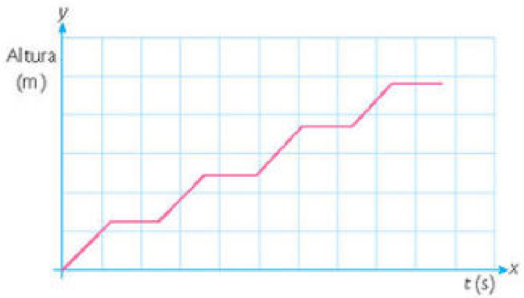


Figura 19.8

B. Una de las siguientes gráficas representa la altura de un elevador en movimiento de subida. ¿Cuál de ellas representa el hecho de que el elevador se detuvo en cada piso?





¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

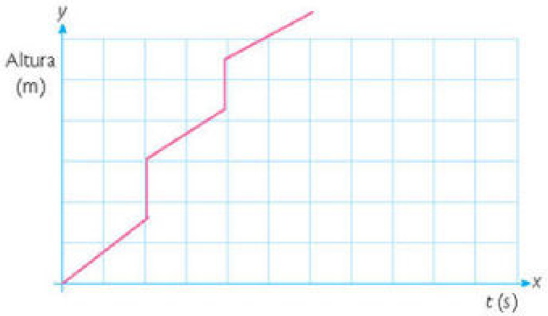


Figura 19.9

Traza la gráfica aproximada del movimiento de descenso del elevador, suponiendo que sólo se detuvo en uno de los pisos, antes de llegar a la planta baja.

C. La gráfica de la figura 19.10 representa cómo varía con el tiempo el nivel del agua en un tanque, que se llena de manera constante (la velocidad a la que se vierte el agua es de igual número de litros por minuto).

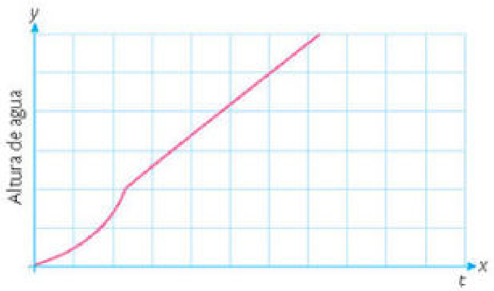


Figura 19.10

Dibuja y describe la forma que tiene el tanque.

D. Traza, de manera aproximada, una gráfica que represente el siguiente recorrido de un ciclista:

1. Al arrancar, va a velocidad constante durante cierto tiempo.
2. Después incrementa su velocidad, aunque cada vez la aumenta menos.
3. Se detiene unos minutos para descansar.
4. Da la vuelta e inicia el regreso; la mitad del camino va a velocidad constante; la otra mitad del recorrido va bajando su velocidad gradualmente, hasta detenerse cuando llega de nuevo a su punto de partida.
5. El viaje dura 40 minutos; a la mitad del recorrido es cuando hizo su descanso.

E. Una taza de café se calienta en un horno de microondas a 80° C. La taza se saca del horno y se deja a la temperatura ambiente, que es de 20° C. La temperatura de la taza disminuirá a medida que pase el tiempo; es decir, en este caso la relación entre las cantidades es decreciente.

¿Se puede suponer que la temperatura cambia de manera constante, es decir, el mismo número de grados centígrados por cada minuto? Argumenta a favor o en contra de esta posibilidad.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

¿Cuál de las siguientes gráficas representa aproximadamente la variación de la temperatura en función del tiempo?

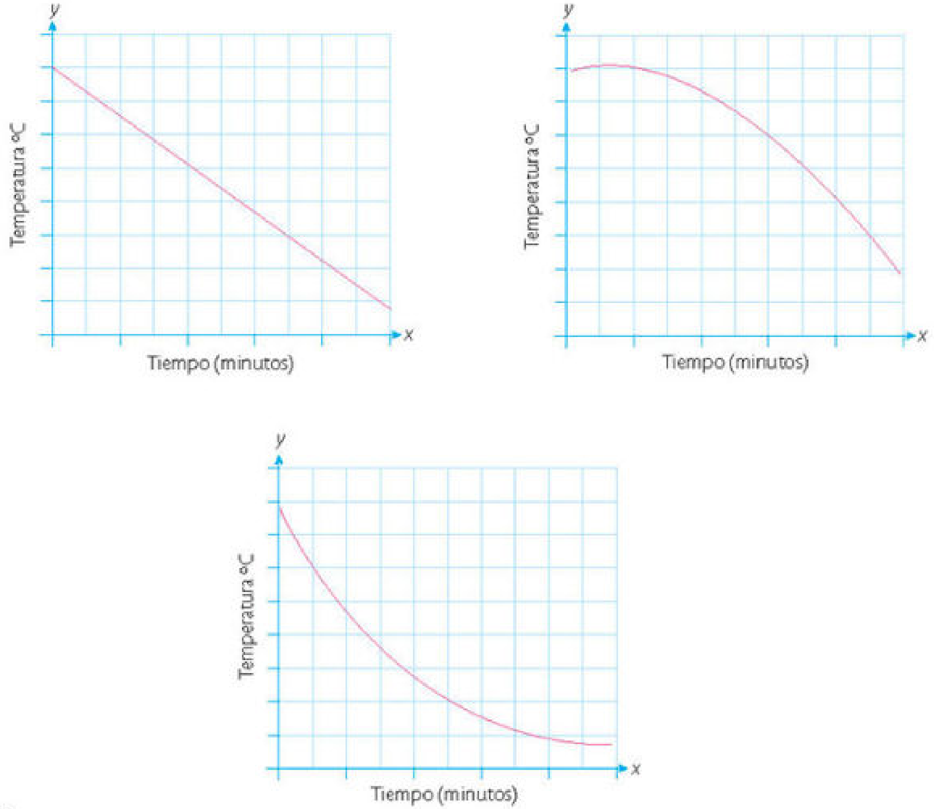


Figura 19.11

Para verificar lo anterior, se tomaron los siguientes datos del enfriamiento de una taza:

Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura (grados centígrados)	80	65	54	46	39	35	32

Tabla 19.3

¿Cómo es la variación en la temperatura cada 5 minutos? Grafica los datos de la tabla para tener una idea de la forma de la gráfica.

Lectura

¿Has oído la frase: "Pienso, luego existo"?

Esta afirmación fue la base del pensamiento del francés René Descartes. En 1637 publicó el libro *Discurso sobre el método para dirigir correctamente la razón*. Es una obra fundamental en filosofía, por lo que se le considera como uno de los grandes pensadores en esa disciplina.

Pero además de la filosofía, Descartes cultivó otras materias. En su libro incluyó tres ejemplos concretos sobre cómo podría ser aplicado su método. Los dos primeros trataban de astronomía. El tercero fue una nota (de 106 páginas) intitulada *La Geometría*.

En *La Geometría* afirma que un par de números pueden determinar una posición sobre una superficie. Esta idea hoy nos parece muy familiar, pero en su época ni siquiera se había inventado el papel cuadriculado.

El concepto de coordenadas dio lugar a lo que hoy conocemos como geometría analítica. Descartes mostró que con ecuaciones se pueden representar puntos, líneas rectas, círculos, parábolas y toda clase de curvas que en geometría se habían venido estudiando por siglos. Es decir, que las ecuaciones se pueden considerar como formas geométricas, y éstas como ecuaciones.

Lo que Descartes logró fue unificar la aritmética, la geometría y el álgebra anteriores a su tiempo, y proporcionar un lenguaje para las matemáticas que vendrían después.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la lectura y trazos de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento. Comenten en grupo su resumen.

Lección 20

¿Quién va al teatro?

Tema: Nociones de probabilidad

Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Para recordar

Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado.
¿Cuál es la probabilidad de que caiga águila y cinco? ______
¿De que salga sol y un número menor de tres? ______
¿Cómo son los dos pares de eventos anteriores?, ¿son independientes o dependientes? Explica. ______

Comenten entre ustedes y con su profesor.

RETO

En la escuela secundaria Isaac Newton se van a rifar dos boletos para ir al teatro. Estos se darán a dos alumnos, que se elegirán por sorteo, uno de cada uno de los grupos de tercer grado. En el Grupo A hay 20 mujeres de un total de 40 alumnos, mientras que en el grupo B hay 24 mujeres de un total de 36 alumnos.

¿Cuál es la probabilidad de que los boletos los ganen dos mujeres? ______
¿Cuál es la probabilidad de que los ganen dos hombres? ______
¿Y qué hay de un hombre y una mujer? ______

Felipe dice que las mujeres tienen ventaja porque son más. Hay quienes opinan que está bastante parejo. ¿Tú, qué crees?

Compartan los procedimientos que cada quien siguió, paso por paso, así como los resultados obtenidos. Coméntenlos con su profesor

Pistas

Las respuestas y la reflexión acerca de las siguientes preguntas te pueden ser útiles para resolver el reto anterior.

- ¿Cómo puedes encontrar todos los resultados posibles?
- ¿Cuál es la probabilidad de escoger una mujer en cada grupo? ¿Cuál de que sea elegido un hombre en cada uno de los grupos?
- ¿De qué manera puedes obtener la probabilidad de los diferentes resultados posibles?
- Cuando se elige un alumno de un grupo, ¿eso afecta el resultado del sorteo en el otro grupo?

Formalización

¿Cuáles son los posibles resultados de rifar los boletos de teatro?, es decir, ¿cuál será su espacio muestra?

Para encontrar el espacio muestra del experimento aleatorio, utiliza un diagrama de árbol. ______

Ahora bien, ¿cuál será la probabilidad de cada uno de los resultados posibles?

Para ello, hay que contar tanto el total de las diferentes maneras en que se puede elegir a cualquier par de alumnos, como las diferentes maneras que son favorables a cada uno de los resultados posibles:

Así, la probabilidad de que los dos alumnos sean hombres, es decir, del resultado Hombre en el grupo A (H_A) y Hombre en el grupo B (H_B) es de:

$$P(H_A \text{ y } H_B) = \frac{20 \times 12}{40 \times 36} = \_\_\_\_$$

Calcula de manera similar las probabilidades de los demás resultados posibles.

Podemos observar en el primero de los resultados posibles que los dos eventos que lo forman, Hombre en el grupo A y Hombre en el grupo B son eventos independientes. ¿Por qué? ______

¿Lo anterior sucede también con los demás resultados de este experimento aleatorio, o hay algún par de eventos que sea dependiente? Explica tu respuesta. ______

Describe a continuación un ejemplo de dos eventos que sean no independientes (o dependientes); explícalo a uno de tus compañeros. ______

Ahora considera lo siguiente: ¿se pueden obtener los mismos resultados de probabilidades, tomando en cuenta solamente las probabilidades de los resultados en cada grupo? ¿Cuál es la relación entre estos diferentes valores de probabilidad?

Para ello, puedes escribir las probabilidades de los eventos simples sobre el diagrama de árbol; completa con las probabilidades de los eventos intersección.

¿Qué observas en cuanto a la relación entre las probabilidades de los eventos simples y la probabilidad del evento intersección, de que ocurran los dos eventos simultáneamente? ______

Comenta con tus compañeros la conclusión que pueden obtener de las anteriores observaciones.

GLOSARIO

Eventos independientes. Son dos eventos tales, que al ocurrir u observarse uno de ellos, la probabilidad de que ocurra el otro no se afecta o altera.

Evento intersección. El evento A y B es el **evento intersección** de los eventos A y B –o la intersección de A y B– y comprende todos los resultados o eventos simples que forman parte de A y B a la vez. Su probabilidad es la suma de las probabilidades de dichos resultados simples.

Si dos eventos A y B son independientes, la probabilidad de que ocurran simultáneamente (o la probabilidad de su intersección) se puede obtener multiplicando sus respectivas probabilidades:

$$P(A \text{ y } B) = P(A)\,P(B)$$

Este resultado se conoce como la regla del producto.

GLOSARIO

Regla del producto. Dos eventos se consideran independientes si la probabilidad de que ocurran simultáneamente (es decir, su intersección) es igual al producto de sus respectivas probabilidades. O sea, que si tenemos dos eventos, *A* y *B*, tales que:

$P(A \text{ y } B) = P(A)\,P(B)$

entonces A y B son independientes.

Comparen sus observaciones sobre esta sección entre ustedes y con su profesor.

UN NUEVO RETO

Al tirar dos dados de seis caras, uno rojo y el otro blanco, encuentren las siguientes probabilidades; determinen en cada caso si los eventos son independientes o dependientes:

- ¿Cuál es la probabilidad de que en ambos dados salga el número tres?
- De que el número mostrado en el dado rojo sea menor o igual que tres, y en el dado blanco sea mayor o igual a cinco.
- De que en el rojo salga número par, e impar en el otro dado.
- Que la suma de los dos dados sea igual a 11, y en el dado blanco salga cinco.
- Que la suma de los dos dados sea cuatro y que ambos números sean iguales.

¿Cuáles son los resultados o eventos simples de este experimento aleatorio y cuántos son? ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de ellos?

¿Cómo son los resultados de un dado con respecto a los del otro? Si en el dado rojo vemos que salió un dos, ¿esto cambia las probabilidades del dado blanco? Si conocemos el resultado en uno de los dados, ¿esto cambia o afecta la probabilidad de alguno de los resultados en el otro? Explica tu respuesta. ______

Este experimento aleatorio se vio en la lección 13, donde se determinó el espacio muestral y las probabilidades de sus resultados simples; pueden utilizar dichos resultados.

Con base en lo anterior, calcula las probabilidades de los eventos y de sus intersecciones; determina si los eventos son independientes o no. Después verifica en qué casos se cumple la regla del producto y en cuáles no.

Comenten y comparen en cada caso sus procedimientos y resultados; atiendan los comentarios de su profesor.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

A. En una escuela secundaria, 10% de los alumnos reprobaron Matemáticas y 12% Español, mientras que 2% reprobaron tanto en Matemáticas como en Español. Se selecciona al azar a un alumno de esta escuela. Los eventos Alumno reprobado en Matemáticas y Alumno reprobado en Español ¿son dependientes o independientes? Explica tu respuesta.

B. Si detienes a dos personas en la calle al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas hayan nacido en viernes?, ¿cuál es la probabilidad de que una haya nacido en viernes y la otra en martes?, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de las dos haya nacido en lunes?

C. Una caja contiene tres bolas blancas y dos negras. En sucesión, tres personas sacan una bola al azar, sin devolverla a la caja. La primera persona que saque una pelota blanca gana, ¿cuáles son las probabilidades de ganar de la primera persona en sacar una pelota, de la segunda y de la tercera persona?, ¿qué lugar prefieres ocupar? (Se continúan sacando bolas hasta que alguien gana).

D. Tres amigos van a participar en un torneo de ping-pong, donde todos juegan contra todos. La probabilidad de que Aníbal le gane a Gustavo es de 0.75 [P(A-G)=0.75], de que Gustavo venza a Nemesio es de 0.55 y de que Aníbal derrote a Nemesio es de 0.60. Suponiendo que los resultados de estos partidos son independientes entre sí, encuentra las probabilidades siguientes:

a) que Aníbal gane sus dos partidos

b) que Aníbal gane sus dos partidos y que Gustavo le gane a Nemesio

c) que Aníbal pierda sus dos partidos

Lectura

Una cosa no tiene nada que ver con la otra

Existe el riesgo de confundir eventos mutuamente excluyentes con eventos independientes. Esto puede suceder cuando se usan expresiones como: "una cosa no tiene nada que ver con la otra". Esta expresión es útil para describir la independencia de dos sucesos o fenómenos cotidianos. Pero al aplicarla a eventos, puede sugerir que no hay traslapes, o puntos o elementos en común; y dos eventos que no se traslapan o que no tienen elementos en común, son mutuamente excluyentes, y no son independientes.

De hecho, si dos eventos son independientes, entonces tienen al menos un elemento en común. Encuentren por equipos ejemplos de eventos que muestren estas características.

Comparen y comenten con su profesor.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto al cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes. Comenten en grupo su resumen.

Evaluación Bloque III

Evalúa lo que aprendiste en el bloque III, resolviendo los siguientes problemas.

Una fórmula para la caja

Contesta las siguientes preguntas de acuerdo con la situación que se presenta.

1. A un pedazo de cartulina de forma cuadrada se le cortan cuadrados en las esquinas de 4 cm por lado. Después se doblan las orillas hacia arriba para formar una caja sin tapa, como se muestra en la figura EIII.1:

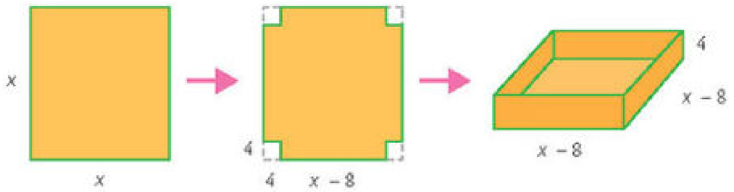


Figura EIII.1

Si el volumen de la caja es el área de la base por su altura, ¿cuál es la expresión algebraica que representa su volumen?

(A) $4(x-4)^2$

(B) $8(x-4)^2$

(D) $4(x-8)^2$

(C) $8(x-8)^2$

¿Cuánto debe medir la cartulina original para que el volumen de la caja sea de 576 cm^3?

(A) 20 cm por lado (B) 24 cm por lado

(C) 14 cm por lado (D) 30 cm por lado

2. Considera la siguiente ecuación de segundo grado: $5x^2 + 8x + 4 = 0$.
Si se analiza el valor del discriminante, ¿cuál de las siguientes opciones es la correcta con respecto a las soluciones de esta ecuación?

(A) La ecuación tiene una solución que es número real.

(B) La ecuación tiene dos soluciones que son números reales.

(C) La ecuación tiene múltiples soluciones.

(D) La ecuación no tiene solución entre los números reales.

Congruentes o semejantes

3. En el siguiente triángulo ABC, $\overline{PQ}$ es paralela a $\overline{AB}$. Si $\overline{CP} = 2$ cm y $\overline{PA} = 3$ cm, ¿cuál es la razón de $\frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}$?

(A) 1

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 5

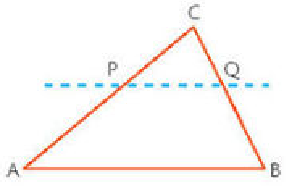


Figura EIII.2

4. En una rampa se va a colocar una columna de sostén, como se observa en la figura EIII.3. Calcula la longitud de la columna, representada con la letra h.

(A) 12 cm

(B) 10 cm

(C) 15 cm

(D) 21 cm

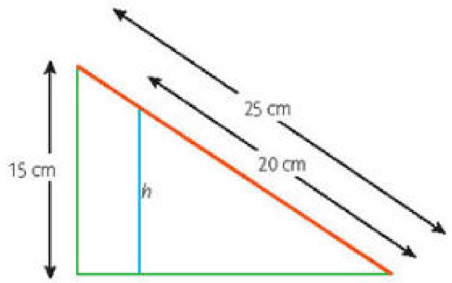


Figura EIII.3

5. En el siguiente esquema (figura EIII.4) hay dos figuras homotécicas que están en relación 1 a 4. ¿Cuáles son?

(A) 1 y 4

(B) 3 y 1

(C) 4 y 2

(D) 5 y 3

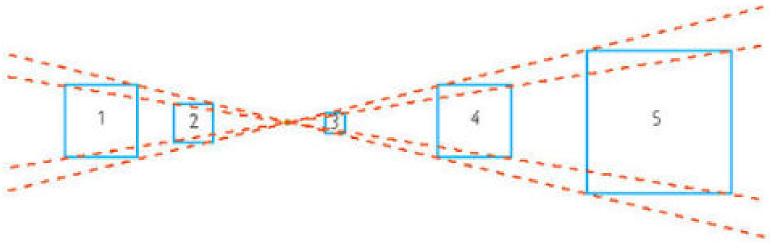


Figura EIII.4

Sube, pero no mucho

6. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 14.7 m/s. La gráfica de la figura EIII.5, que representa el movimiento de esta pelota, es la siguiente.

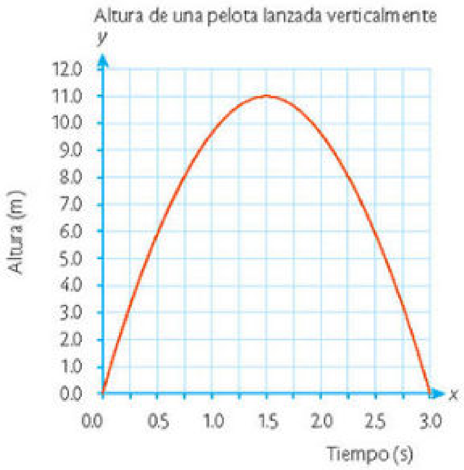


Figura EIII.5

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el movimiento de la pelota y corresponde a la gráfica anterior?

(A) $h = 14.7t - 4.9t^2$ (B) $h = 14.7t + 4.9t^2$ (C) $y = 9.8t - 14.7$ (D) $y = 14.7$

Explica tu procedimiento brevemente. ______________________________

La pelota alcanza su altura máxima a los:

(A) 1.5 segundos (B) 1.8 segundos (C) 2.5 segundos (D) 12 segundos

La altura máxima a la que llega la pelota es de:

(A) 5.055 m (B) 9.8 m (C) 10.5 m (D) 11.025 m

¿Cómo se llena?

7. El recipiente de la figura EIII.6 recibe un líquido a velocidad constante, que entra por la parte superior del cilindro.

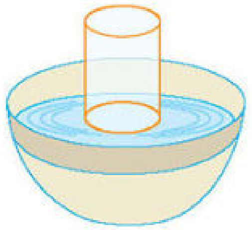


Figura EIII.6

a) Elabora una gráfica que represente la relación entre la altura que alcanza el líquido en el recipiente y el tiempo transcurrido.

Todo sobre ruedas

8. Andrea compró una bicicleta de montaña. Hoy la va a probar. La probabilidad de que los frenos funcionen correctamente es de 0.98, y la probabilidad de que los cambios de velocidad operen correctamente es de 0.95.

Los dos eventos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos componentes funcionen correctamente al probar la bicicleta?

(A) 0.931 (B) 0.948 (C) 0.965 (D) 0.980

Bloque IV

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de los contenidos de este bloque, el alumno:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Lección 21

¡Queremos pastel!

Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Para recordar

¿Cuáles son las expresiones algebraicas que definen los términos de las siguientes sucesiones?

a. −10, −7, −4, −1, ... b. 2, 7, 12, 17, ...

Compara las expresiones que obtuviste con las de otros compañeros y discutan cuál es el procedimiento que siguen para determinar la regla de una sucesión.

RETO

Hoy es el cumpleaños de Sofía y hará una fiesta en su casa. Lo mejor del festejo será el pastel, que estará formado con pastelitos individuales para evitar tener que cortarlo durante la reunión.

Sofía ha invitado alrededor de 50 personas a su celebración. Antes de que lleguen sus invitados, coloca los pastelitos para formar su pastel, de tal manera que haya más de 50 piezas individuales, por si llegan más invitados.

De acuerdo con la forma en que va acomodando Sofía los pastelitos individuales, ¿cómo quedará su pastel para que alcance para todos?

Figura 21.1

Pistas

Si pensamos en el pastel como un rectángulo:

Figura 21.2

Pistas (*continuación*)

- ¿Cómo va creciendo la medida de la base de estas figuras rectangulares?
- ¿Cuánto medirán las bases de las figuras que siguen en la sucesión?
- ¿Cómo va creciendo la altura?
- ¿Cuánto medirán las alturas de las figuras que siguen en la sucesión?
- ¿Qué relación hay entre la medida de la base y de la altura en cada figura?
- ¿Qué relación hay entre la medida de la base de cada figura y la posición que ocupa en la secuencia?
- ¿Cómo podrías determinar el número de pastelitos que forma cada figura?
- ¿En qué número de figura habrá más de 50 pastelitos?
- ¿Cómo representarías algebraicamente cuánto medirá la altura de la figura que se halla en la posición n de la sucesión?
- ¿Cuántos pastelitos formarán la figura que se halla en la posición n?
- Dibuja en tu cuaderno la figura que represente el pastel que le conviene tener a Sofía.

Formalización

Para encontrar la regla que sigue el número de pastelitos que van formando el pastel grande, completa la tabla 21.1

Número de figura	Número de pastelitos en la base	Número de pastelitos en la altura	Número de pastelitos que forman el pastel grande
1	2	1	(2)(1)=2
2	3	2	(3)(2)=6
3	4		
4			
...	...	...	...
n	$n+1$		

Tabla 21.1

¿Obtuviste la misma expresión al resolver el reto? ¿Hiciste este procedimiento o algún otro? Compara con tus compañeros los procedimientos que siguieron al resolver el reto con éste que se sugiere, y vean las ventajas y desventajas, si las hay, de cada uno.

UN NUEVO RETO

En equipo, analicen el siguiente procedimiento que se basa en el cálculo de las diferencias de los términos de una sucesión, y nos permite encontrar la expresión algebraica que la define. Este método plantea que una sucesión numérica que se obtiene a partir de un polinomio de n grado, sus diferencias n son constantes, es decir, una sucesión numérica cuya regla general es una expresión algebraica o polinomio de primer grado, sus primeras diferencias son constantes; una sucesión cuya expresión general sea de segundo grado, sus segundas diferencias son constantes; si la expresión es de tercer grado, sus terceras diferencias son constantes, etcétera.

Para que puedas entender lo anterior, analiza el siguiente ejemplo:

Número de figura	1	2	3	4	5	6
Número de pastelitos	2	6	12	20	30	42

Tabla 21.2

Ahora trabajaremos con los números que obtuvimos:

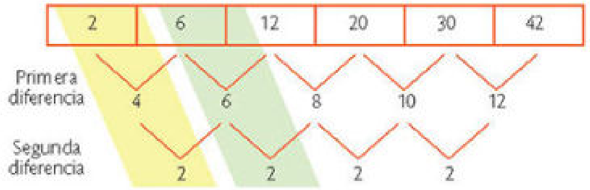


Figura 21.3

Como puedes observar, la segunda diferencia es constante, esto nos permite reconocer que la expresión general de esta sucesión será una expresión de segundo grado.

Ahora obtendremos, a partir de la expresión $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, una sucesión con sus respectivas diferencias. Observa cómo:

Valor de la x	1	2	3	4	5
Expresión que se obtiene al sustituir el valor de x en $ax^2 + bx + c$	$a + b + c$	$4a + 2b + c$	$9a + 3b + c$	$16a + 4b + c$	$25a + 5b + c$

Tabla 21.3

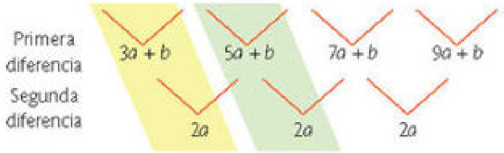


Figura 21.4

Haciendo la correspondencia de las expresiones obtenidas con la sucesión numérica, tenemos:

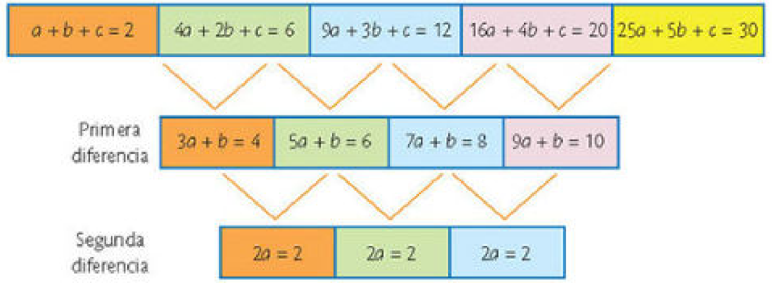


Figura 21.5

De cada una de las ramas de la figura 21.5 (señaladas con diferentes colores) obtenemos un sistema de ecuaciones que podemos resolver; por ejemplo, con la rama naranja tenemos:

$2a = 2$ entonces $a = 1$

$3a + b = 4$ si $a = 1$, entonces $b = 1$

$a + b + c = 2$ si $a = 1$, $b = 1$, entonces $c = 0$

Por lo tanto, ya que a es el coeficiente de la variable cuadrática y vale uno, b es el coeficiente de la variable lineal y vale uno, y el término independiente es c y vale cero, la expresión cuadrática de la sucesión de números es:

$$x^2 + x$$

Discute con tus compañeros por qué del siguiente sistema de ecuaciones también se puede obtener la expresión anterior:

$$2a = 2$$
$$5a + b = 6$$
$$4a + 2b + c = 6$$

Obtén, a partir de este sistema, la expresión cuadrática, despejando de estas expresiones las literales a, b y c, y obtén sus valores para que puedas sustituirlos en la expresión:

$$ax^2 + bx + c$$

¿Es la misma o diferente? ____________________

¿Qué otros sistemas puedes obtener? ____________________

¿Siempre es la misma expresión? ____________________

Comprueba que la expresión que obtuviste, que es la regla de la sucesión, es válida para toda la sucesión, tomando en cuenta que x es el número de término de la sucesión (número de figura) y $\boldsymbol{x^2 + x}$ es el número de pastelitos que hay en la figura. Y en términos de la situación planteada, x es el número de filas que tiene el pastel y $\boldsymbol{x^2 + x}$ es el número de pastelitos individuales que forman el total del pastel.

Con tu equipo, determinen, utilizando el método de diferencias, la expresión algebraica que define la regla de la siguiente sucesión:

3, 9, 19, 33, 51,...

Comparen con otros equipos las expresiones que obtuvieron y comenten con su profesor y el resto del grupo las dificultades que tuvieron al seguir este procedimiento.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

A. Encuentra la regla de las siguientes sucesiones:

1. 2, 5, 10, 17, 26, …
2. 4, 13, 28, 49, 76, …
3. 3, 9, 17, 27, 39, …
4. 4, 9, 16, 25, 36, …
5. Determina la regla que sigue el número de triángulos en la sucesión de figuras que se presenta enseguida:

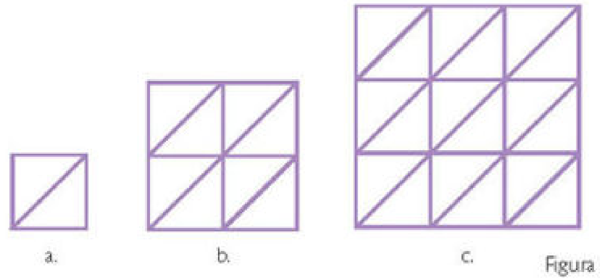


Figura 21.6

Pasatiempo

Encuentra el número que sigue en la siguiente sucesión de figuras:

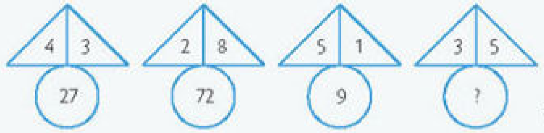


Figura 21.7

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la obtención de una expresión cuadrática para definir el término de una sucesión. Comenten en grupo su resumen.

Lección 22

Si gira, se forma

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Para recordar

En parejas, sigan las instrucciones y contesten las preguntas:

1. Tracen un triángulo isósceles con un ángulo de 30°.
2. Tracen al triángulo un eje de simetría.
3. Tracen un rectángulo.
4. Tracen al rectángulo un eje de simetría.
5. Tracen un círculo.
6. Tracen al círculo un eje de simetría.

¿Cuántos ejes de simetría diferentes podrían haber trazado en el triángulo? ____________
¿Por qué? ____________
¿Cuántos ejes de simetría diferentes podrían haber trazado en el rectángulo? ____________
¿Por qué? ____________
¿Cuántos ejes de simetría diferentes podrían haber trazado en el círculo? ____________
¿Por qué? ____________

Comenten en el grupo las estrategias que usaron para trazar las figuras y los ejes de simetría, en caso de que tengan alguna duda, pregunten al equipo que esté exponiendo.

➔ RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Como parte de las actividades de la clase de Matemáticas, los alumnos de una secundaria están preparando una exposición de trabajos, de tal forma que cada equipo elige un tema y lo desarrolla para presentarlo ante la gente que asiste a la exposición. Y los temas que ya hay son: Adivinación de números, Presentación de gráficas en la computadora, caleidoscopios, simetría y curiosidades. Miriam y René escogieron el tema Cuerpos con caras redondas, y lo repartieron de la siguiente forma:

- Miriam: Formación de la esfera, del cono y del cilindro.

Miriam trata de generar una esfera, un cono y un cilindro a partir de un triángulo rectángulo, un círculo y un rectángulo; también quiere comprobar que el cilindro se puede generar por el deslizamiento de un círculo a lo largo de una recta perpendicular a la base (altura). Ella ha preparado el siguiente material: un rectángulo, un círculo y un triángulo isósceles de cartulina. Una bandeja con jabón espumoso. Un aro cubierto de hilo. Tres palitos de madera y cinta adhesiva.

Con el material que tiene Miriam para la exposición:

¿Cómo formarían el cilindro?

¿Cómo formarían el cono?

¿Cómo formarían la esfera?

¿Para qué le servirá a Miriam el agua con jabón y el aro? ____

Figura 22.1

- René: Construcción de desarrollos planos de cilindros y conos rectos.

René trata de descubrir cómo hacer desarrollos planos para la construcción de conos y cilindros rectos.

El material que utilizará René es el siguiente: una regla, unas tijeras, una goma, un lápiz, un vaso cónico de papel, un cilindro de papel y varias hojas de cartulina.

Con el material que tiene René para la exposición, ¿Cómo formarían el desarrollo plano del cilindro?

¿Cómo formarían el desarrollo plano del cono?

Figura 22.2

¿Para qué le servirá a René el vaso cónico de papel?

¿Para qué le servirá a René el cilindro de papel?

Comenta con tus compañeros y profesor las respuestas a estas preguntas.

Pistas

La mejor pista en estos casos es experimentar.

Consigan el material que utilizarán Miriam y René, y experimenten:

- Pega un palito como eje de simetría a cada una de las figuras y gíralas rápidamente con las manos.

¿Qué cuerpo geométrico se forma al girar el rectángulo? ____

¿Qué cuerpo geométrico se forma al girar el triángulo isósceles? ____

¿Qué cuerpo geométrico se forma al girar el círculo? ____

Dibuja los cuerpos que resultan cada vez.

Respecto al aro cubierto con hilo:

Métanlo al agua jabonosa y sáquenlo tratando de mantenerlo paralelo al fondo del recipiente, para formar un cuerpo geométrico con la estela de jabón.

¿Qué cuerpo geométrico se formará? ____

Consigan alguna caja o envase en forma de cilindro y ábranla con cuidado para ver el desarrollo plano que lo originó. Dibujen el desarrollo plano.

Pistas (*continuación*)

Hagan lo mismo con un envase en forma de cono. Dibujen el desarrollo plano.

Escuchen y observen las respuestas de otros compañeros y equipos, y pregunten, en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

Cuando el triángulo revoluciona (gira) forma un cono como el que se muestra.

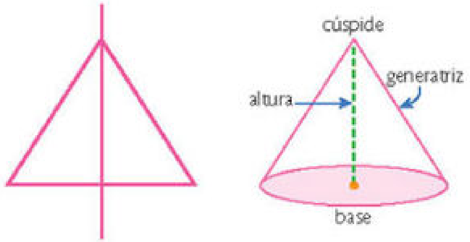


Figura 22.3

Observa ambas figuras y contesta, tomando como base el triángulo:

¿Qué determina la altura del cono? ______

¿Qué determina la base del cono? ______

¿Qué determina la cúspide del cono? ______

¿Qué determina la generatriz del cono? ______

¿Cuál es la diferencia entre la generatriz y la altura del cono? ______

Cuando el rectángulo revoluciona (gira) forma un cilindro como el que se muestra.

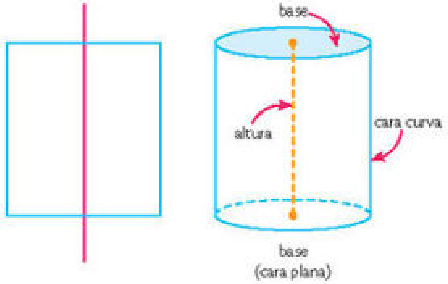


Figura 22.4

Observa ambas figuras y contesta, tomando como base al rectángulo:

¿Qué determina la altura del cilindro? ______

¿Qué determina las bases del cilindro? ______

¿Qué determina la cara curva del cilindro? ______

¿Cuál lado determina el perímetro de la base? ______

El cilindro también se puede generar por el deslizamiento de un círculo a través de una recta perpendicular a la base (altura).

Con base en la figura, si movemos el aro hacia arriba, en forma paralela a la base, se formará un cilindro. Inténtalo.

Para que las burbujas del agua jabonosa sean más resistentes, agrega un poco de glicerina.

Cuando el círculo revoluciona (gira) forma una esfera como la que se muestra.

Figura 22.5

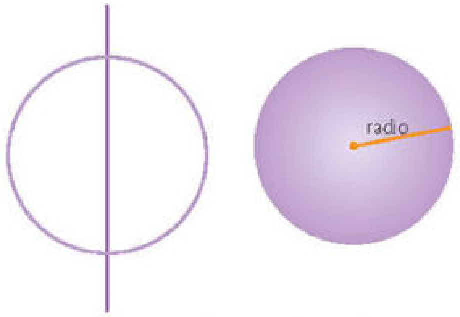


Figura 22.6

Observa ambas figuras y contesta, tomando como base el círculo:

¿Qué determina el radio de la esfera? ______

¿Por qué se les conoce a estos tres cuerpos como sólidos de revolución? ______

______

Observa una forma de elaborar los desarrollos planos de un cono y un cilindro.

Construcción de un cilindro recto.

- Traza un círculo con 1.4 cm de radio.
- Determina libremente la altura del cilindro.

- Para definir la longitud del rectángulo que formará el cilindro, calcula el perímetro de uno de los círculos que formarán las bases, aplica la fórmula:

$$P = 2\pi r, \text{ o bien, } P = \pi D$$

- Sustituye a la variable r por 1.4 cm.
- Calcula el perímetro.
- El resultado es 8.796 cm, por lo que puedes redondear a 8.8 cm la medida buscada, así la medida del largo del rectángulo será 8.8 cm.
- No olvides trazar también las pestañas para pegar las bases y cerrar el cilindro.

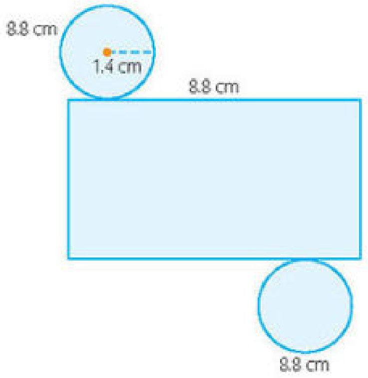


Figura 22.7

Construcción de un cono

Un método rápido y fácil:

- Traza un círculo de 2 cm de radio.
- Traza el diámetro de 4 cm.
- Prolonga el diámetro fuera del círculo, el doble de su medida original, en este caso medirá 8 cm, y llama O al extremo fuera del círculo.
- Ubica tu compás en O y traza un arco que toque el círculo en el extremo del diámetro.
- Traza a cada lado del punto O un ángulo de 45° y prolonga los lados hasta tocar el arco, o prolonga el arco que trazaste hasta que toque los lados de ambos ángulos.
- La plantilla está lista, solamente traza las pestañas necesarias, recorta y arma.

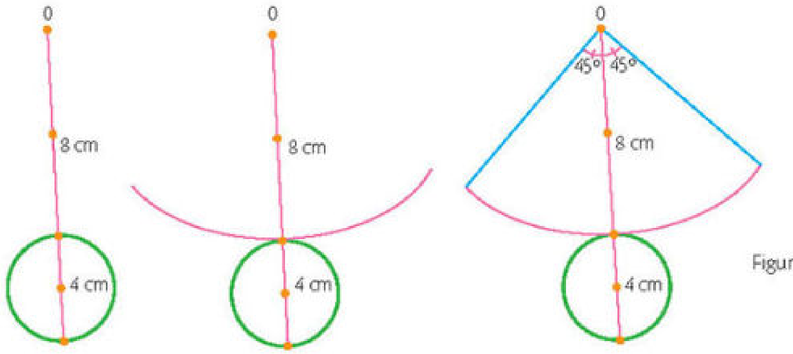


Figura 22.8

Investiga otra forma de trazar la plantilla de un cono.

Analicen en grupo los detalles para trazar los desarrollos planos del cono y del cilindro y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Tracen en una cartulina el desarrollo plano de un cono con las siguientes características:

La base del cono debe tener 5 cm de radio.

La generatriz debe medir 11 cm.

¿De cuánto es el perímetro de la base? ____________________

Si trazas un círculo de radio 11 cm, ¿de cuánto es su perímetro? ____________________

Si la circunferencia del círculo de 11 cm abarca 360°, ¿de cuántos grados debe ser el ángulo que determina el arco de circunferencia que se necesita? ____________________

Escribe la relación de proporcionalidad para determinar la medida del arco de circunferencia.

____

¿Cuánto tendrá de altura el cono? ____________ ¿Por qué? ____________________

____

Armen el desarrollo plano y verifiquen las medidas.

Exponga su trabajo en el grupo y, en caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. En un trozo de cartulina, tracen, recorten y armen el desarrollo plano de un cilindro con las siguientes características:
   - Radio de la base 3.5 cm
   - Altura del cilindro 7.5 cm
2. Hagan el dibujo de un cono y escriban donde corresponda los siguientes nombres:
   - Radio del cono
   - Generatriz
   - Altura

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

3. Si en un cono el diámetro de la base es de 12 cm y la altura es de 8 cm, ¿cuánto mide la generatriz? __________________ Ilustra el problema.

4. En un trozo de cartulina traza el desarrollo plano de un cono con las características del problema tres, ármalo y comprueba las medidas.

Comenta tus respuestas con tus compañeros y, en caso necesario, resuelvan algunos ejercicios en el pizarrón.

Aplica las TIC

Usa alguna aplicación de geometría para trazar el desarrollo plano de un cilindro.

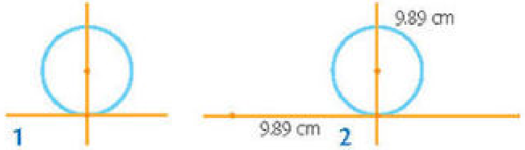


Figura 22.9

1. Traza un círculo y dos rectas, una que pase por el centro y otra que sea perpendicular a la primera y que toque un punto de la circunferencia.
2. Configura la computadora para que te indique la medida del perímetro del círculo y para que esa misma medida la marque sobre la recta que toca un punto de la circunferencia.

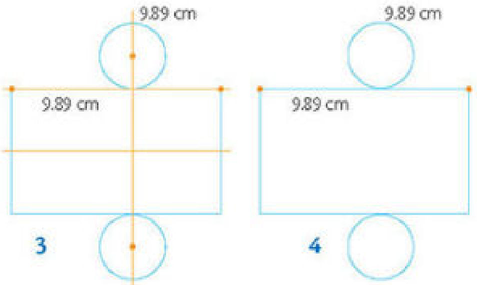


Figura 22.10

3. Traza un rectángulo con la medida marcada en la recta, traza una recta perpendicular a la que ya existe y que pase por el punto medio de uno de los lados del rectángulo, finalmente, configura la computadora para que trace el círculo simétrico con respecto a la recta recién trazada.

Aplica las TIC (*continuación*)

4. Finalmente, oculta los trazos auxiliares y deja el desarrollo plano con las medidas del perímetro de la base y la del lado del rectángulo.
5. Reduce el tamaño de la base y observa qué pasa con el lado del rectángulo.
6. Aumenta el tamaño de la base y observa qué pasa con el lado del rectángulo.

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

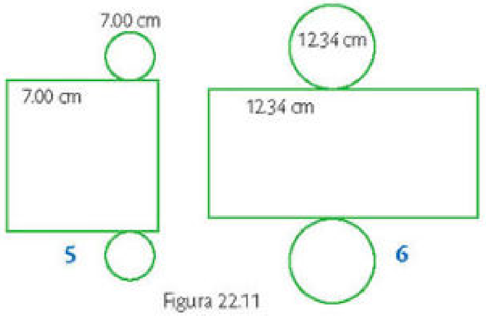


Figura 22.11

Lectura

Arquímedes

Arquímedes es uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, tanto por la magnitud de su contribución al patrimonio de la humanidad en este campo del conocimiento como por la genialidad de sus métodos. Nació hacia el 287 a.C. en Siracusa, Sicilia, y murió en el 212 a.C., en la misma ciudad, dedicado por completo a sus trabajos e investigaciones, con una intensidad tal que...

"... se olvidaba de comer y descuidaba su persona, hasta tal punto que, cuando en ocasiones era obligado por la fuerza a bañarse y perfumarse, solía trazar figuras geométricas en las cenizas del fuego y diagramas en los ungüentos de su cuerpo, y estaba embargado por una total preocupación y, en un muy cierto sentido, por una posesión divina de amor y deleite por la ciencia" (Plutarco).

La obra de Arquímedes, *Sobre la esfera y el cilindro*, consta de dos libros. El primero es un complemento natural del libro XII de *Los elementos de Euclides*. Ambos tratan de las figuras esféricas, cilíndricas y cónicas, pero Arquímedes trasciende de forma muy considerable los resultados euclídeos, al demostrar de forma magistral, nuevos y fundamentales teoremas sobre el volumen (Proposición I.34 y su Corolario) y la superficie de la esfera (Proposición I.33).

Los trabajos geométricos desarrollados por Arquímedes en la obra citada son considerados probablemente su aportación más importante como científico, hasta el punto que, según testimonio de Plutarco (Marcelo, XVII.12), ratificado por Cicerón (Tusculanas V.23), el sabio exhortó a sus deudos a que se grabara en su tumba lo que sería el primer epitafio científico de la historia: las figuras de un cilindro circunscrito a una esfera junto con un epigrama que describiese la relación que las vincula, sencillas proporciones que debieron impresionar al propio Arquímedes:

«La esfera y el cilindro circunscrito a ella están en la relación de dos a tres, tanto en volumen como en superficie total».

«Los volúmenes de un cono, una semiesfera y un cilindro de la misma altura y radio están en la razón 1:2:3».

Adaptado de: https://www.upf.edu/pdi/dcom/xavierberenguer/recursos/fig_calc/_2_/estampes/1_9.htm Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.

EN
RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a los cuerpos de revolución y los desarrollos planos del cono y el cilindro. Comenten en grupo su resumen.

Lección 23 ¿Qué tienen que ver los catetos?

Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Para recordar

1. En parejas, observen el tangram, calculen las medidas de los triángulos de la tabla 23.1 y llénenla:

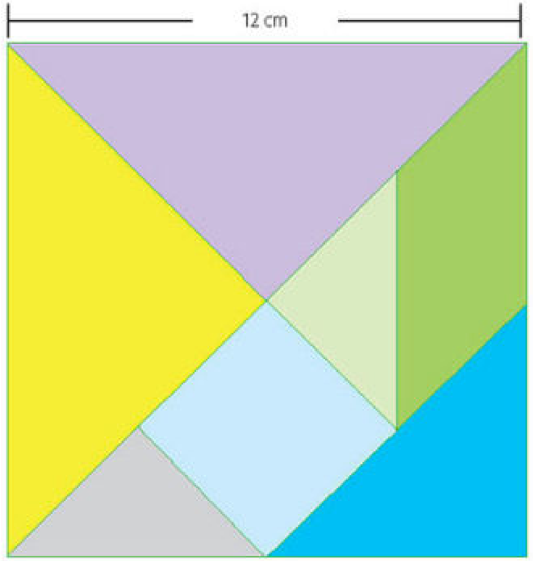


Figura 23.1

Triángulo amarillo			Triángulo verde			Triángulo azul		
Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa	Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa	Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa

Tabla 23.1

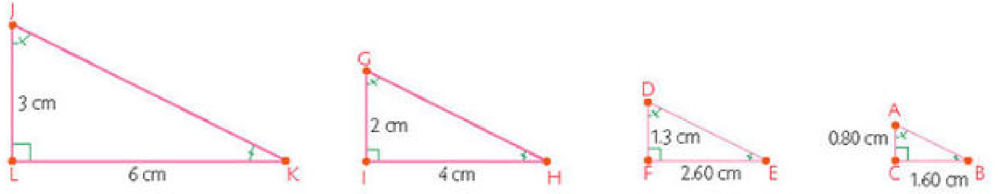
2. ¿Cuál es la razón entre los catetos de cada triángulo? ______________________.
3. ¿Cuánto miden los ángulos interiores iguales en los triángulos? ______________________
4. ¿Cuál criterio de semejanza aplican para afirmar que son semejantes? ______________________
5. Las parejas de triángulos: violeta y amarillo, y verde claro y gris ¿son semejantes? ________ ¿Por qué? ______________________
6. ¿Se puede afirmar que todos los triángulos isósceles rectángulos son semejantes? ________ ¿Por qué? ______________________

Comenten en el grupo las respuestas y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Isaac ha observado que en los triángulos rectángulos semejantes la razón homóloga entre los catetos es constante.



$\frac{JL}{LK} = 0.50$ $\frac{GI}{IH} = 0.50$ $\frac{DF}{FE} = 0.50$ $\frac{AC}{CB} = 0.50$

Figura 23.2

Le pregunta a Carmen:

¿Podrás trazar un triángulo rectángulo semejante a otro, conociendo solamente la razón entre los catetos? ______________________ ¿Cómo? ______________________

¿Tendrá algo que ver el ángulo agudo de referencia para formar la razón de los catetos del triángulo? ______________________

¿Tendrá alguna influencia la hipotenusa para la formación del triángulo rectángulo? ______________________

Comenta con tus compañeros y profesor las respuestas a estas preguntas.

Pistas

En parejas, realicen las siguientes investigaciones:

1. Trazar un triángulo rectángulo semejante a otro, conociendo solamente la razón entre los catetos.
   Partan de un triángulo conocido para que sepan si fue posible trazar uno semejante.

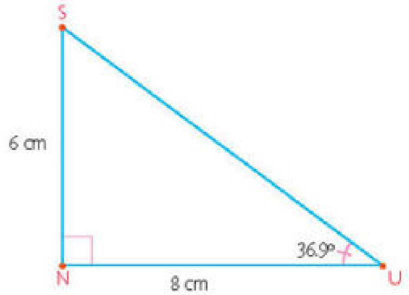


Figura 23.3

Con respecto al ángulo con vértice en U la razón que se forma será el cateto opuesto al ángulo entre el cateto adyacente, esto es:

$$\frac{6}{8} = 0.75$$

Pistas (*continuación*)

Para trazar un triángulo rectángulo, de tal forma que la razón sea 0.75, realicen lo siguiente:
Escriban la razón en forma de fracción y encuentren otras fracciones equivalentes:

$$0.75 = \frac{75}{100} = \underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad} = \frac{6}{8} = \frac{1.5}{2} = \frac{7.5}{\quad}$$

Utilicen las razones encontradas para trazar en su cuaderno otro triángulo; recuerden que:
Ambos catetos deben formar un ángulo recto.
El numerador de la razón es el cateto que se opondrá al ángulo.
El denominador es el cateto que estará adyacente (junto) al ángulo.
El triángulo trazado ¿es semejante al ΔSUN? ______________________ ¿Por qué?

____

¿Es posible afirmar que conociendo la razón entre los catetos de un triángulo rectángulo se puede trazar otro triángulo semejante? ______________________ ¿Por qué?

____

2. Papel del ángulo agudo de referencia para formar la razón entre los catetos del triángulo. Se traza el ángulo de referencia con vértice en U.

Se trazan segmentos perpendiculares por algunos puntos en uno de los rayos que forman el ángulo, como se muestra en la figura 23.4 y se miden los catetos de los triángulos resultantes.

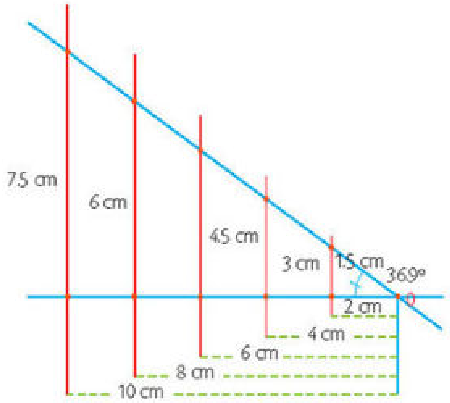


Figura 23.4

Escriban a continuación las razones que se forman en los diferentes triángulos. Usen la regla: cateto opuesto al ángulo con vértice en U, sobre el cateto adyacente.:

Pistas (*continuación*)

¿Habrá otro ángulo diferente que forme la misma razón? ______________ ¿Por qué? __________

____

¿Es determinante el ángulo de referencia para formar triángulos rectángulos semejantes a uno dado? ______________ ¿Por qué? ______________________

____

3. El papel de la hipotenusa en la formación de triángulos rectángulos.
Se traza una recta que tenga la misma pendiente (inclinación) que la hipotenusa.

Después se trazan segmentos perpendiculares, de tal forma que sus extremos estén sobre la hipotenusa, y formen triángulos rectángulos, como se muestra en la figura 23.5.

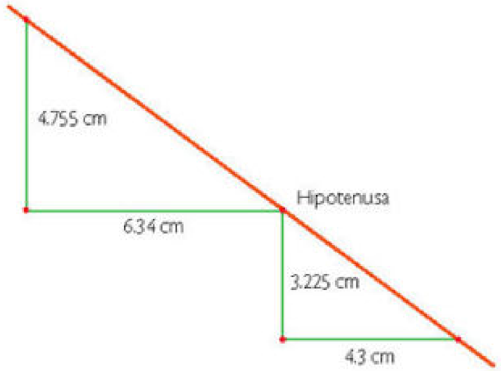


Figura 23.5

Escriban a continuación las razones que se forman en los dos triángulos, usando la regla cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

¿Tiene alguna influencia la pendiente de la hipotenusa para formar triángulos rectángulos semejantes? ______________ ¿Por qué? ______________________

____

¿Habrá otra inclinación diferente para la hipotenusa que forme la misma razón? __________
¿Por qué? ______________________________________

Escuchen las respuestas y opiniones de otros compañeros y equipos y, pregunten en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

En parejas, observen la imagen de la recta $y = x$, después contesten las preguntas:

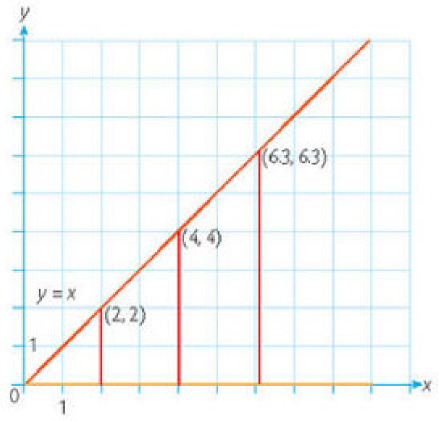


Figura 23.6

¿Cuánto mide el ángulo con vértice en O que se forma con la recta y el eje x? __________

Se han marcado las coordenadas que determinan tres triángulos diferentes, escriban las medidas de:

Los catetos opuestos al ángulo con vértice en O. __________

Las medidas de los catetos adyacentes al ángulo con vértice en O. __________

Escriban las razones que se forman por el cateto opuesto entre el cateto adyacente, en cada caso, y su cociente. __________

Expliquen brevemente por qué los cocientes son iguales. __________

Esta razón (cateto opuesto entre cateto adyacente) se llama tangente (tan), y en una tabla de funciones trigonométricas o en una calculadora se puede verificar que el ángulo de 45° tiene una tangente de uno.

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo.

- Observen la figura 23.7 que representa una recta en el plano, con la ecuación que la origina escrita en dos formas equivalentes.

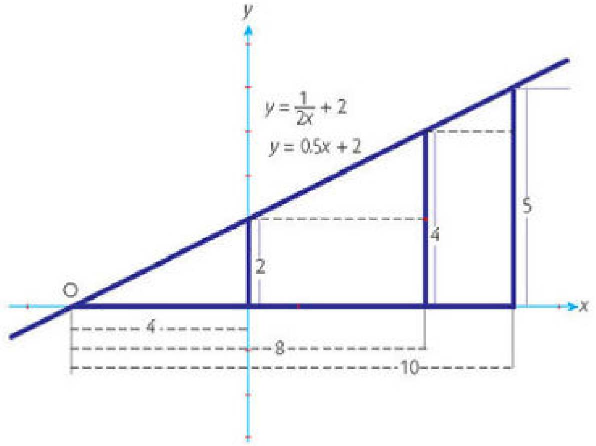


Figura 23.7

Se han formado tres triángulos con sus respectivas medidas.

Escriban la razón tangente de cada triángulo con respecto al ángulo con vértice en O.

____

Se formaron otros dos triángulos al trazar unas líneas punteadas, paralelas al eje x. Midan cuidadosamente y escriban la razón tangente entre sus catetos:

____

Si se tiene la medida de ambos catetos, se puede buscar en una tabla trigonométrica o con una calculadora el valor del ángulo:

$$\text{Tan O} = 0.5$$

- En una calculadora se marca el número 0.5.
- Después la tecla **2ND** (**Inv** o **Arc**).
- Luego la tecla tan (tangente).
- Y dará un valor para el ángulo aproximado a 26.6°.
- El orden de introducción de los datos puede variar según la calculadora.

Se puede calcular también el valor de un cateto, por ejemplo:

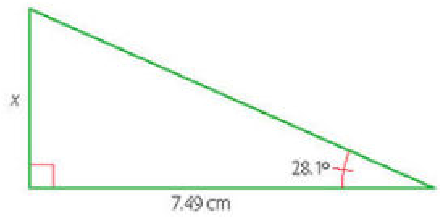


Figura 23.8

La razón para la tangente con respecto al ángulo marcado es:

Tan 28.1 $= \frac{x}{7.49}$, por lo que al despejar x, quedará:

$x = (7.49)\tan 28.1$ y esto es igual a:

$x = 7.49 \times .53395 = 3.9992855$ y redondeando quedará que:

$x = 4$

Calculen en su cuaderno el valor del cateto, usando ahora como referencia el ángulo que se marca.

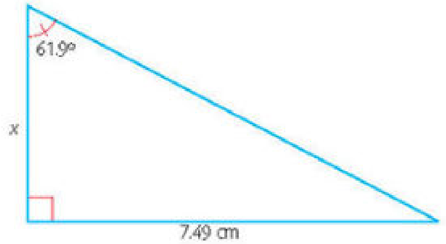


Figura 23.9

Analicen en grupo las diferentes formas de aplicar la función tangente y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

En la siguiente ilustración se han marcado rectas con la ecuación que las genera, y que pasan por el origen de un plano a 30, 45 y 60 grados del eje x.

Formen en cada recta un triángulo rectángulo trazando una línea perpendicular al eje x en alguno de sus puntos.

Midan lo más exacto posible y después llenen la tabla 23.2. Pueden usar calculadora.

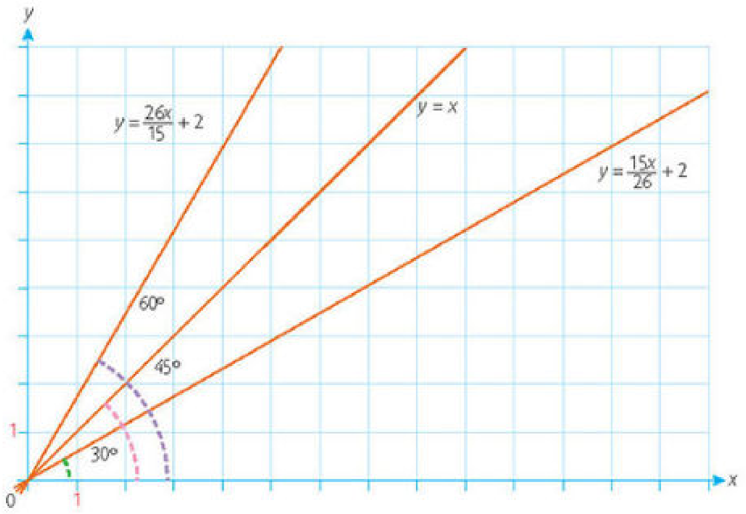


Figura 23.10

Ángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Pendiente	
			Razón	Expresión decimal
30°				
45°				
60°				

Tabla 23.2

Comparen sus resultados con los de otros equipos.

¿Las medidas de los catetos coinciden con las de todos los equipos? ______

¿Por qué? ______

¿Las medidas de las razones y de las expresiones decimales coinciden con las de todos los equipos?

¿Por qué? ______

______

Comprueben si sucederá lo mismo al trazar otras rectas con diferente pendiente.

Expongan su trabajo en el grupo y, en caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. Lee la lectura sobre el uso de la calculadora que está en la sección Aplica las TIC.
2. La distancia entre dos postes es de 6 m, el menor mide 4 m. Desde el borde superior del menor, se observa al mayor con un ángulo de elevación de 35°.

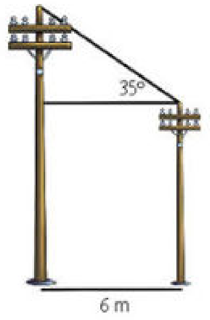


Figura 23.11

¿Cuánto mide el poste mayor? ______

3. Se quiere calcular la superficie que ocupará un kiosco. Los datos que se tienen son:
El kiosco ocupará una superficie pentagonal (regular).
La medida de uno de sus lados es de ocho metros.

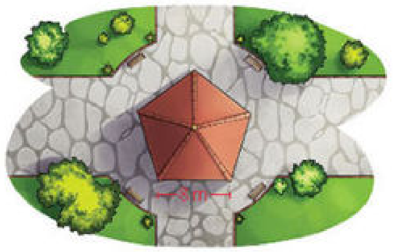


Figura 23.12

¿Cuánto medirá la superficie? ______

4. Observa el siguiente dibujo y calcula la altura de la Torre Latinoamericana.

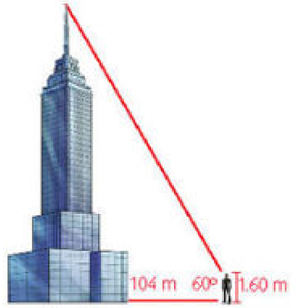


Figura 23.13

¿Cuánto mide la Torre Latinoamericana? ______

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

5. Usa tu calculadora y completa la tabla 23.3.

Ángulo	Tangente
28°30'	
72°56'	
	1
	3.606

Tabla 23.3

6. Completa la tabla 23.4. Utiliza el triángulo siguiente:

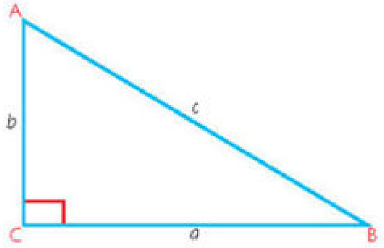


Figura 23.14

a	*b*	*c*	∠A	∠B	Tan A	Tan B
20	99					
	5.78			35°20'		
		10	45°10'			
		1		40°22'		

Tabla 23.4

7. Envía a un compañero el valor de la tangente de un ángulo y pídele que te indique a qué ángulo pertenece.
8. Envía a un compañero el valor de un ángulo y pídele que te indique su tangente. Corrobora las respuestas de tu compañero.
9. Calcula el valor del edificio y el de la antena.

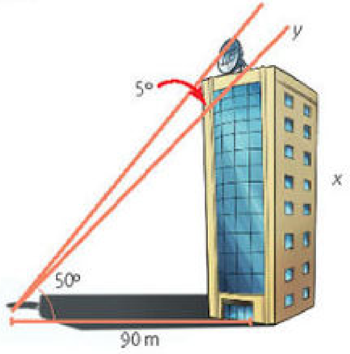


Figura 23.15

Altura del edificio ______________________ Altura de la antena ______________________

Comenta tus respuestas con tus compañeros y, en caso necesario, resuelvan algunos ejercicios en el pizarrón.

Aplica las TIC

Usa alguna calculadora científica para encontrar el valor de la tangente de algunos ángulos, esto es, la razón entre los catetos con respecto a uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

Observa la distribución de las teclas:

Encuentra el valor de la función tangente (*tan*) de un ángulo de 28°40':

- Si tu calculadora no tiene una tecla para convertir a decimales los minutos y segundos de grado, divide $\frac{40}{60}$ para saber qué porción de grado es 40'; suma los 28° que tenías, con lo que tendrás en pantalla 28.666, y oprime la tecla llamada *tan*. Deberás obtener un valor de 0.5467, redondeado a diezmilésimos.

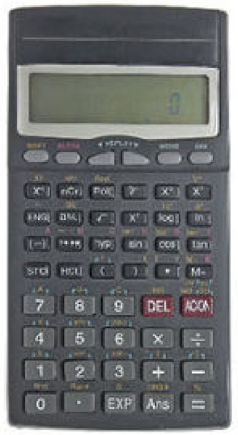


Figura 23.16

Generalmente, la misma tecla **tan** sirve también para regresar el valor del ángulo al aplicar *tan*$^{-1}$, esto se logra con la tecla **2ND** (en algunas calculadoras **Inv** o **Arc**) y la respectiva tecla **tan**.

Por ejemplo, encontrar el valor del ángulo, si se sabe que la tangente, es 0.91312548:

Captura el número 0.91312548.

Oprime la tecla **2ND**.

Oprime la tecla **tan**.

Oprime la tecla **enter**, **exe** o = (según la calculadora). Deberás obtener un valor de 42.4, redondeado a décimos.

En algunas calculadoras las instrucciones son al revés, esto es, primero se da el valor de la función y luego el número.

- Si tu calculadora tiene la opción de transformar automáticamente grados minutos y segundos, oprime 42.4 y la tecla **° ' "**. Deberás obtener 42°24'.
- Si tu calculadora no tiene la opción de transformar automáticamente grados minutos y segundos, multiplica 0.4 por 60 para obtener el número de minutos; finalmente, deberás obtener 42°24' al sumarle los 42 grados.

Verifica que tu calculadora esté programada para trabajar con grados, de lo contrario, los valores que encuentres serán diferentes a los de tus compañeros.

Usa tu calculadora y llena la tabla 23.5.

Ángulo	Tangente
	1
10° 20'	
40° 30' 20"	
	.57735
55°	
60° 22'	
	1.73205080

Tabla 23.5

Aplica las TIC (*continuación*)

¿Cómo es la tangente de los ángulos mayores que 45°? ______

¿Cómo es la tangente de los ángulos menores que 45°? ______

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, en caso de duda, resuelvan juntos el ejercicio. Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

Cómo medir el mundo

Eratóstenes fue un gran matemático de origen griego y el primer hombre (hasta donde se conoce) que midió la longitud de la circunferencia de la Tierra con una exactitud sorprendente, calculando 40 834 km, lo cual aún en nuestros días es motivo de admiración, ya que el error fue únicamente de 834 km. Eratóstenes nació en el año 276 a.n.e. y murió en el 194 a.n.e.

Figura 23.17

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. Comenten en grupo su resumen.

Lección 24 Las relaciones entre los catetos y la hipotenusa

Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Para recordar

1. En parejas, observen los triángulos de la figura 24.1 y escriban las razones de las tangentes que se solicitan en la tabla 24.1:

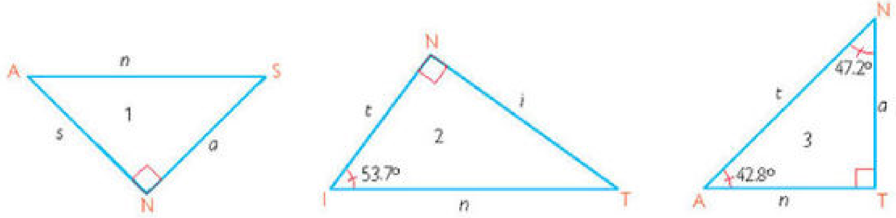


Figura 24.1

Triángulo 1		Triángulo 2		Triángulo 3	
Tan S	Tan A	Tan T	Tan 53.7°	Tan 47.2°	Tan 42.8°

Tabla 24.1

¿Cómo se define la tangente de un ángulo en un triángulo rectángulo? ______

Comenten en el grupo las respuestas y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Isaac está observando los triángulos que se forman en un tramo de madera que tapa un costado de la escalera.

Figura 24.2

Carmen lo ve y le pregunta:
¿Cuántos triángulos se forman en el tramo de madera? ____________________
¿Tendrán alguna razón constante cada cateto como numerador y la hipotenusa como denominador? ¿Cómo sucedió en el caso de la tangente? ______________ ¿Cuál es la razón? __________

Midan lo necesario y contesten las preguntas.
Comenta con tus compañeros y profesor las respuestas a estas preguntas.

Pistas

En parejas, realicen las siguientes investigaciones:

1. Encontrar la razón entre los catetos opuestos al ángulo con vértice en O y la hipotenusa, y ver si hay una constante.
   Puede ser más objetiva la investigación si se toma solamente el tramo de madera con los triángulos definidos por literales.

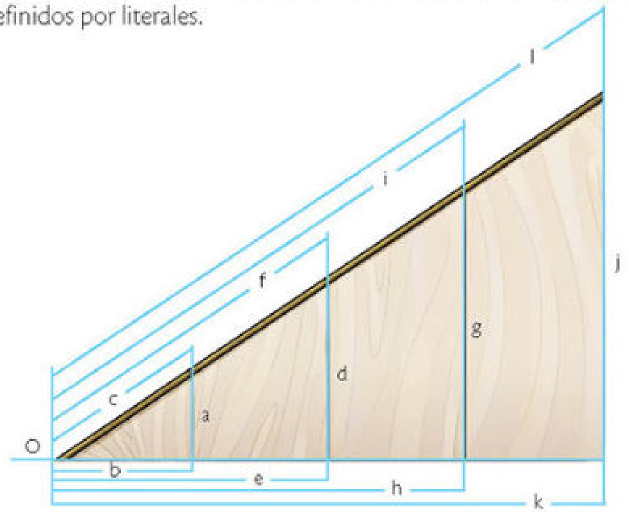


Figura 24.3

Cada triángulo de los formados tiene dos catetos; se empezará la investigación con cada uno de los catetos azules y las hipotenusas correspondientes.
Midan lo más exactamente posible y después llenen la tabla 24.2.

Cateto		Hipotenusa		Razón	
Literal	Valor	Literal	Valor	Fracción	Decimal
a					
d					
		i			
		l			

Tabla 24.2

Pistas (*continuación*)

Cuando se forma la razón como: el cateto opuesto al ángulo sobre la hipotenusa.
¿Hay una razón constante? __________ ¿Cuál? ____________________

2. Encontrar la razón entre los catetos adyacentes al ángulo con vértice en O y la hipotenusa, y deducir si hay una constante. Midan lo más exactamente posible y después llenen la tabla 24.3.

Cateto		Hipotenusa		Razón	
Literal	Valor	Literal	Valor	Fracción	Decimal
b					
e					
		i			
		l			

Tabla 24.3

Cuando se forma la razón como: el cateto adyacente al ángulo sobre la hipotenusa.
¿Hay una razón constante? __________ ¿Cuál? ____________________
Los triángulos formados en el tramo de madera:
¿Son congruentes? __________ ¿Por qué? ____________________
¿Son semejantes? __________ ¿Por qué? ____________________

Expongan su trabajo en el grupo y escuchen las respuestas y opiniones de otros compañeros y equipos y, pregunten en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

En un triángulo rectángulo, la relación que existe del cociente del cateto opuesto a uno de los ángulos agudos entre la hipotenusa, es llamada función seno.

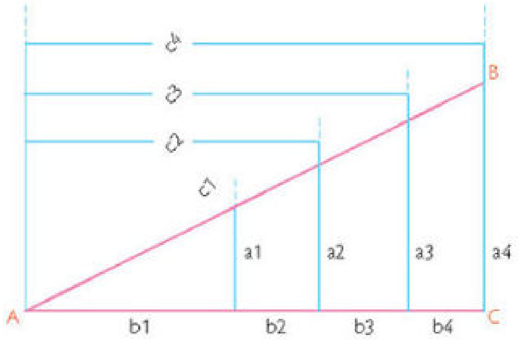


Figura 24.4

GLOSARIO
Función seno. Es la relación del cociente del cateto opuesto al ángulo de referencia entre la hipotenusa.

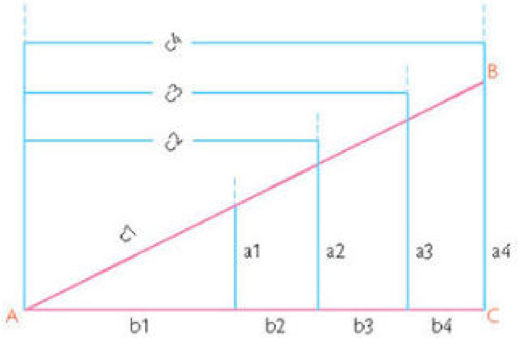
En el caso del ejemplo mostrado, es fácil observar que aplicando el teorema de Tales se cumple para el ángulo con vértice en A:

sen $A = \frac{a1}{c1} = \frac{a2}{c2} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

y para el seno del ángulo con vértice en B:

sen $B = \frac{b1}{c1} = \underline{\qquad} = \frac{b3}{c3} = \underline{\qquad}$

La forma de abreviar la escritura seno del ángulo x es sen x.
Observa ahora la relación entre catetos e hipotenusa con la función coseno, cuya abreviatura es cos.



GLOSARIO

Función coseno. Es la relación del cociente del cateto adyacente al ángulo de referencia entre la hipotenusa.

Figura 24.5

Igual que en las funciones anteriores, es fácil observar que aplicando el teorema de Tales se cumple para el ángulo con vértice en A:

cos $A = \frac{b1}{c1} = \frac{b2}{c2} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

y para el coseno del ángulo con vértice en B:

cos $B = \frac{a1}{c1} = \underline{\qquad} = \frac{a3}{c3} = \underline{\qquad}$

Las funciones seno y coseno son muy importantes, ya que a partir de ellas se define la función tangente.

La tangente de un ángulo x se puede definir como:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Solucionar un triángulo significa que, dada una función, se calculen las demás funciones; observa:

Si sen $30° = \frac{1}{2}$

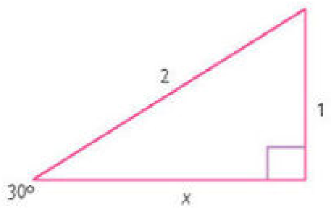


Figura 24.6

Encontrar las demás funciones:
Se puede aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el valor del cateto restante.
$\mathbf{1^2 + x^2 = 2^2}$ y al despejar x, se tiene que:
$\mathbf{x = \sqrt{3}}$ y ahora se pueden definir las demás funciones.
Define las siguientes funciones:
Cos 30° = ______________________________
Tan 30° = ______________________________

Para la aplicación de las funciones trigonométricas en la solución de problemas, se deben tener en cuenta varios aspectos:

- La formación de un triángulo rectángulo con los datos del problema.
- Datos conocidos y dato a calcular para la solución del problema.
- La función trigonométrica que relaciona los datos conocidos con el desconocido.
- El despeje de la incógnita.
- La lectura en tablas o en la calculadora de la función trigonométrica elegida para la solución del problema.
- La unidad de medida para expresar el resultado del problema.

Analicen en grupo las funciones seno y coseno y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.
En la siguiente ilustración se han marcado segmentos de recta que están dentro de un círculo con centro en el origen de un plano y con radio uno, los segmentos de recta pasan por el origen del plano a 30, 45 y 60 grados del eje x.
Se han formado con cada recta un triángulo rectángulo, trazando una línea perpendicular al eje x que pasa por la intersección de la recta con el círculo.
Midan lo más exacto posible y después llenen la tabla 24.4. Pueden usar calculadora.

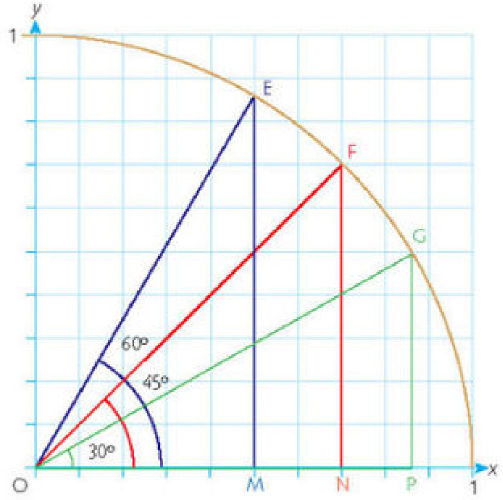


Figura 24.7

Ángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Seno	Coseno
30°				
45°				
60°				

Tabla 24.4

Comparen sus resultados con los integrantes de otros equipos.

¿Las medidas de los catetos coinciden con las de todos los equipos? ______

¿Por qué? ______

¿Las medidas de las razones y de las expresiones decimales coinciden con las de todos los equipos? ______ ¿Por qué? ______

Comparen el seno de 60° con el coseno de 30°. ¿Cómo son? ______

Comparen el coseno de 60° con el seno de 30°. ¿Cómo son? ______

- Comprueben que el seno de un ángulo con el coseno de su complemento son iguales. Pueden usar su calculadora.
- Comprueben que el producto de la tangente de un ángulo, por la tangente de su complemento es igual a uno. Pueden usar calculadora.
- Comprueben que el cociente de la función seno de un ángulo entre la función coseno del mismo ángulo, es igual a la tangente del mismo ángulo. Pueden usar su calculadora.

Recuerden que los ángulos complementarios son aquellos que al sumarlos dan como resultado 90°.

Expongan su trabajo en el grupo y, en el caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

1. Lee la lectura sobre el uso de la calculadora que está en la sección Aplica las TIC.
2. Si sen **B** = $\frac{12}{37}$, escribe el valor de las demás funciones.

Cos B =

Tan B =

Sen A =

Cos A =

Tan A =

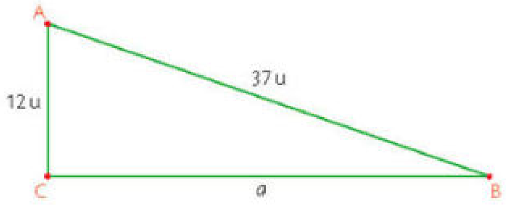


Figura 24.8

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

3. Usa tu calculadora y completa la tabla 24.5.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
28°30'			
28°30'	0.81411		
		0.3365	3.606

Tabla 24.5

4. Proporciona a un compañero el valor de un ángulo y pídele que te indique su seno, coseno y tangente. Corrobora las respuestas de tu compañero.
5. Traza dos triángulos rectángulos, mide lo más exactamente posible los lados y los ángulos, calcula con lápiz y papel las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente de los ángulos agudos. Verifica tus respuestas con la calculadora.
6. Completa la tabla 24.6. Utiliza el triángulo siguiente:

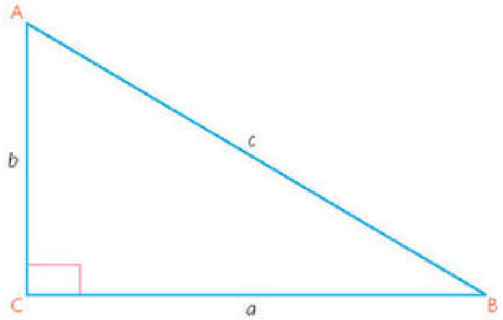


Figura 24.9

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

a	*b*	*c*	∠A	∠B	Sen A	Cos A	Tan A	Sen B	Cos B	Tan B
20	99									
	5.78			35°20'						
		10	45°10'							
		1		40°22'						

Tabla 24.6

7. Calcula la medida del poste hasta centímetros.

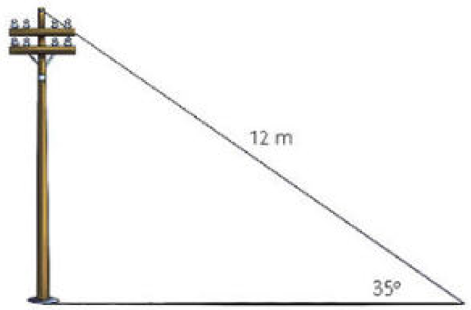


Figura 24.10

El poste mide ____

Comenta tus respuestas con tus compañeros y, en caso necesario, resuelvan algunos ejercicios en el pizarrón.

Aplica las TIC

Usa alguna calculadora científica para encontrar el valor de las funciones seno, coseno y tangente de algunos ángulos.

Encuentra el valor de la funciones: seno (*sen*), coseno (*cos*) y tangente (*tan*) de un ángulo de 28°40'.

- Si tu calculadora no tiene una tecla para convertir a decimales los minutos y segundos de grado, divide 40/60 para saber qué porción de grado es 40'; suma los 28° que tenías, con lo que tendrás en pantalla 28.666, y oprime la tecla llamada **tan**. Deberás obtener un valor de 0.5467, redondeado a diezmilésimos.

  Obtén el valor del seno y del coseno del mismo ángulo:

  Sen 28.666° = ______________________________

  Cos 28.666° = ______________________________

Comprueba con tu calculadora que la tangente de un ángulo equivale a dividir el seno entre el coseno del ángulo en cuestión.

Aplica las TIC (*continuación*)

Generalmente, las mismas teclas *sen, cos, tan* sirven también para obtener el valor del ángulo al aplicar sen^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}. Esto se logra con la tecla **2ND** (en algunas calculadoras **Inv** o **Arc**) y las respectivas teclas *sen, cos, tan*.

Por ejemplo, calcula el valor del ángulo si se sabe que la tangente es 5.91235:

¿El ángulo será mayor o menor que 45°? ______________ ¿Por qué? ______________________

Captura el número 5.91235.
Oprime la tecla **2ND**.
Oprime la tecla **tan**.
Oprime la tecla **enter**, **exe** o = (según la calculadora). Deberás obtener un valor de 80.4, redondeado a décimos.

Expresa el ángulo 80.4° en grados y minutos. ________________________________
Obtén el valor del ángulo en grados y minutos para las siguientes funciones:
Sen x = 0.71325 x= ________________
Cos y = 0.64011 x= ________________

En algunas calculadoras las instrucciones son al revés, esto es, primero la función y luego el número.

- Si tu calculadora tiene la opción de transformar automáticamente grados, minutos y segundos, oprime 80.4 y la tecla **° ' "**. Deberás obtener 80°24'.
- Si tu calculadora no tiene la opción de mostrar automáticamente el resultado en grados, minutos y segundos, hazlo manualmente.

Verifica que tu calculadora esté programada para trabajar con grados, de lo contrario los valores que encuentres serán diferentes a los de tus compañeros.

Usa tu calculadora y completa la tabla 24.7.

Ángulo	Tangente (tan)	Seno (sen)	Coseno(cos)
	1		
10° 20'			
40° 30' 20"			
		0.5	
55°			
60° 22'			
			0.5

Tabla 24.7

¿Es posible encontrar para la función seno un valor mayor que uno? __________ ¿Por qué? ____________

Aplica las TIC (*continuación*)

¿Es posible encontrar para la función coseno un valor mayor que uno? __________ ¿Por qué? __________

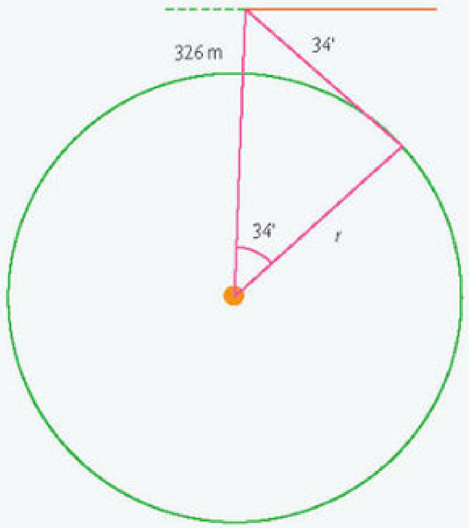
Investiga para qué valores están definidas las funciones seno y coseno.
Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, en caso de duda, resuelvan juntos el ejercicio.
Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

El radio de la Tierra

El gran matemático llamado Al–Biruni, de origen persa, que nació en el año 973 de nuestra era, calculó, usando trigonometría, el radio de la Tierra, para lo cual hizo lo siguiente:

Subió a un monte de 326 m y calculó en 34' el ángulo de depresión de la horizontal hacia el horizonte, y con esta información resolvió el problema al encontrar un valor de 6 519.674 km, lo cual resulta muy próximo al real. Su error es de aproximadamente 139 km. Al-Biruni murió en el año 1 048 de nuestra era.



$$r = \frac{326 \cos 34'}{1 - \cos 34'}$$

Figura 24.11

EN
RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la aplicación de las funciones trigonométricas seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan). Comenten en grupo su resumen.

Lección 25

Razones trigonométricas

Tema: Medida

Contenido: Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Para recordar

1. En parejas observen los triángulos y escriban las razones que se solicitan en la tabla 25.1:

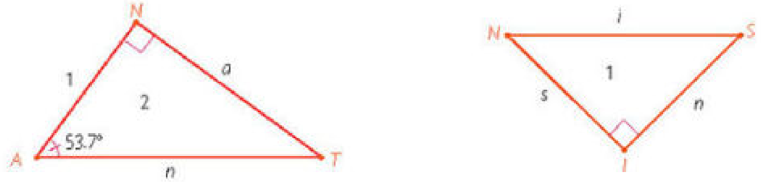


Figura 25.1

Triángulo 1			Triángulo 2		
Sen S	Cos S	Tan N	Sen 53.7°	Cos T	Tan T

Tabla 25.1

Escribe cómo se definen las funciones:
Seno = __________
Coseno = __________
Tangente = __________

Escribe cómo se abrevian las funciones:
Seno = __________
Coseno = __________
Tangente = __________

Comenten en el grupo las respuestas y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Carmen le pide ayuda a Isaac para que entre los dos piensen cómo investigar la variación de las funciones seno, coseno y tangente cuando la hipotenusa permanece constante, pero el ángulo de referencia cambia.

¿Variará el tamaño de los catetos cuando cambia el ángulo de referencia? __________
¿Por qué? __________
¿En qué momento los catetos del triángulo formado serán iguales? __________

¿Qué pasará con los valores de las funciones cuando el ángulo de referencia sea cero? ____________
¿Y cuando éste valga 90°? ____________
¿Habrá un momento en el que el valor de las funciones seno y coseno sean iguales? ____________
¿Habrá un momento en el que el valor de la función seno sea uno? ____________
¿Habrá un momento en el que el valor de la función coseno sea uno? ____________
¿La función seno podrá valer más de uno? ____________
¿La función coseno podrá valer más de uno? ____________
¿En qué momento el valor de la función tangente será menor que uno? ____________
¿En qué momento el valor de la función tangente será mayor que uno? ____________
¿En qué momento el valor de la función tangente será uno? ____________

Comenta con tus compañeros y profesor cómo llevar a cabo la investigación para responder a las preguntas.

Pistas

En parejas, pueden usar un trozo de hilo o cordón para representar la hipotenusa.

Tracen un segmento OB.

Figura 25.2

Coloquen el cordón en el punto O y formen diferentes ángulos respecto al segmento OB. Tracen cada vez un segmento perpendicular al segmento OB para formar triángulos rectángulos.

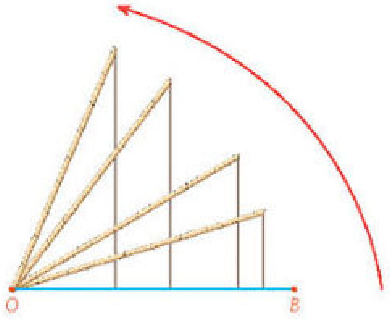


Figura 25.3

También pueden usar una regla en la misma forma en la que usaron el cordón. Observen la figura 25.4.

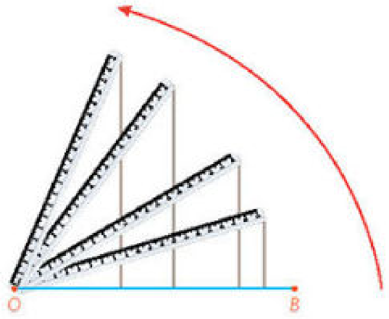


Figura 25.4

Pistas (*continuación*)

Una vez que tracen los triángulos midan lo más exactamente posible los catetos y los ángulos, y contesten las preguntas del reto. Pueden usar una calculadora para encontrar las funciones.

Expongan su trabajo en el grupo y escuchen las respuestas y opiniones de otros compañeros y equipos y, pregunten en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

Un círculo unitario recibe este nombre, porque de radio tiene una unidad, su centro está en el origen del plano cartesiano y los ángulos que se generan en el círculo se trazan en sentido contrario al de las manecillas de un reloj.

Para formar triángulos rectángulos en el círculo, se traza una perpendicular del extremo del radio que está sobre la circunferencia hacia el eje de las *x*.

Al calcular la función seno, el resultado será igual a la longitud del cateto, ya que la hipotenusa vale uno y el coseno será igual a la medida del cateto adyacente (figura 25.5).

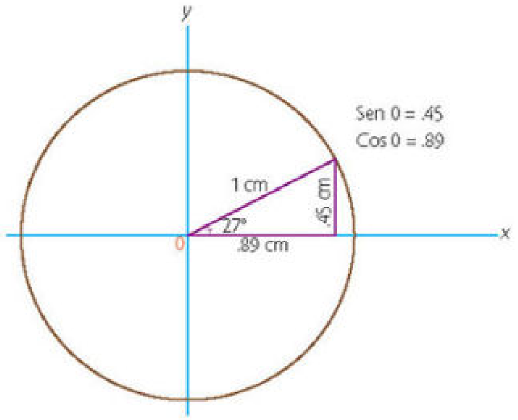


Figura 25.5

Respecto a la tangente, se puede trazar un triángulo semejante al ya formado, de tal forma que el cateto opuesto sea tangente (tocando un punto de la circunferencia) al círculo unitario; se puede observar que dicho cateto tangente tendrá la medida de la función tangente. Ver figura 25.6.

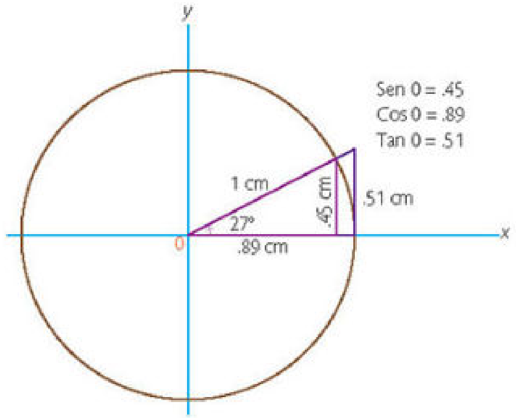


Figura 25.6

Es fácil observar también que las funciones seno y coseno valen lo mismo y la tangente vale uno, cuando el triángulo rectángulo formado es isósceles con ángulos de 45° (figura 25.7).

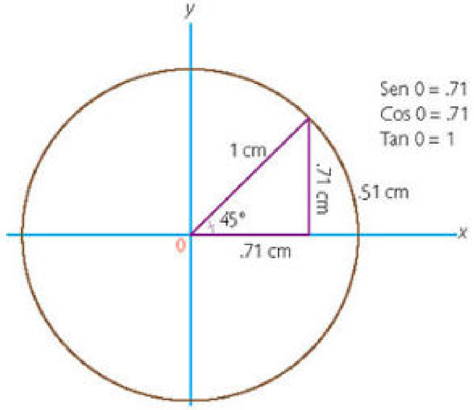


Figura 25.7

Analicen en grupo las funciones trigonométricas en un círculo unitario y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas, consigan una hoja de papel milimétrico.

Tracen en el centro de la hoja un plano cartesiano.

Tracen un círculo de 100 mm de radio, tomando como centro el origen del plano cartesiano.

Supongan que cada cuadro de 1 mm es una centésima parte de la unidad, por lo que el círculo trazado tendrá como radio una unidad.

Tracen los ángulos que necesiten para contestar las preguntas del reto.

Cuenten lo más exacto posible el número de centésimos que tiene cada cateto, para que puedan resolver las preguntas. Recuerden que la hipotenusa medirá siempre 1 unidad. Usen su calculadora para corroborar sus cálculos.

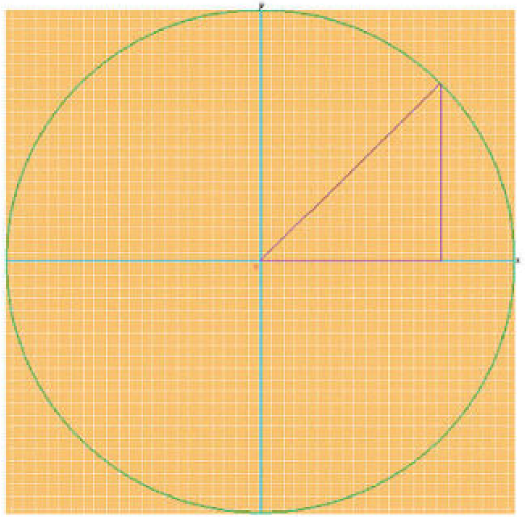


Figura 25.8

Comparen sus resultados con los de otros equipos.

¿Cuándo usan el mismo ángulo, las medidas de los catetos coinciden con las de todos los equipos? ________ ¿Por qué? ________

¿Las medidas de las expresiones decimales coinciden con las obtenidas en la calculadora? ________ ¿Por qué? ________

Expongan su trabajo en el grupo y, en el caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

En todos los problemas puedes usar calculadora.

1. Si un árbol proyecta una sombra de 6 m cuando el Sol se encuentra a 60° sobre el horizonte:

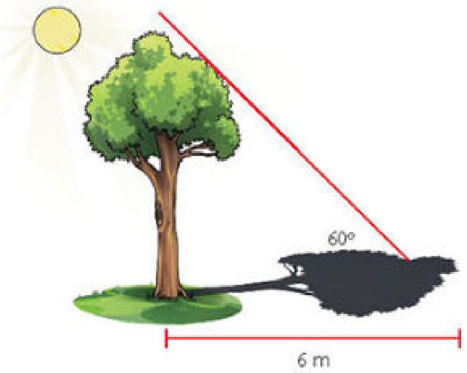


Figura 25.9

¿Cuánto mide la altura del árbol? ________

2. El conejo recorre 3 m cada 2 s; el tren está a 75 m del conejo y va avanzando a 5 m/s. El poste que sostiene la vía está colocado exactamente a la mitad.

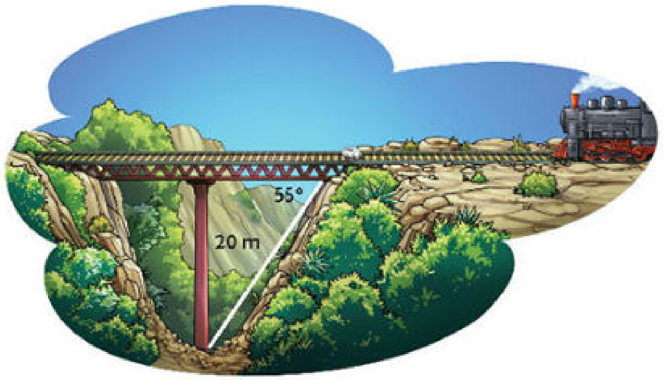


Figura 25.10

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

¿Podrá el conejo pasar a tiempo? ________ Explica brevemente. ¿Por qué? ________________________

3. Si tan **A** = $\frac{a}{12}$ escribe las demás funciones. Y la amplitud de los ángulos A, B.

Ángulo A = ____________________

Ángulo B = ____________________

Cos B =

Tan B =

Sen A =

Cos A =

Tan A =

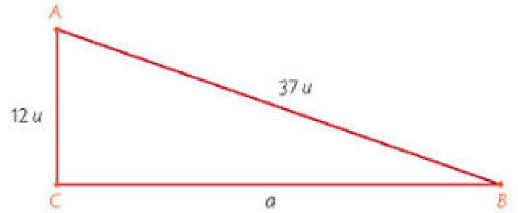


Figura 25.11

4. Calcula y escribe lo que se pide en cada triángulo.

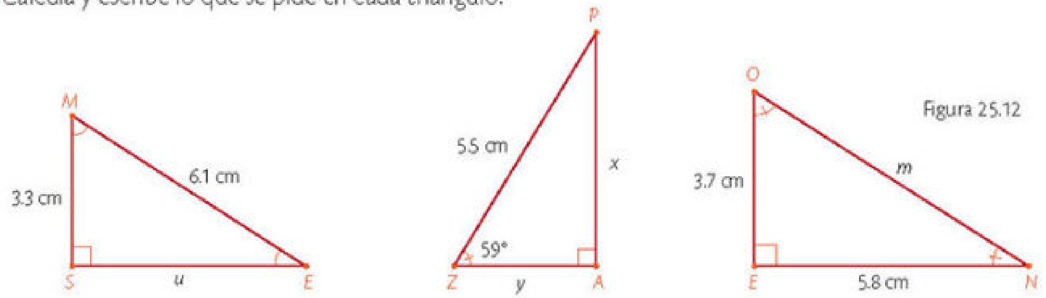


Figura 25.12

u = ________	x = ________	m = ________
∠EMS = ________	y = ________	∠NOE = ________
∠MES = ________	∠APZ = ________	∠ONE = ________

5. Calcula en centímetros la medida del poste y la del cable que lo sostiene.

El poste mide ____________________

El cable mide ____________________

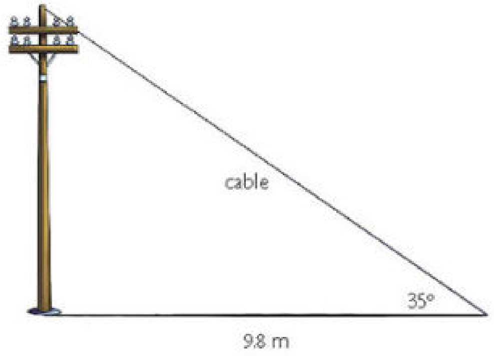


Figura 25.13

Comenta tus respuestas con tus compañeros y, en caso necesario, resuelvan algunos ejercicios en el pizarrón.

Aplica las TIC

En parejas, usen algún software de geometría para trazar, en un círculo unitario, un triángulo rectángulo y ver cómo varían las funciones seno, coseno y tangente, conforme cambia el ángulo de referencia.

1. Configuren la computadora para que muestre un plano cartesiano en la pantalla.

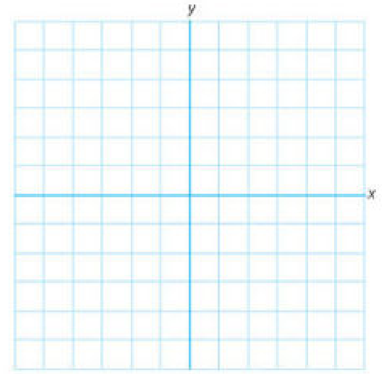


Figura 25.14

2. Tracen un círculo con centro en el origen del plano y radio uno (pueden tomar hasta la quinta o décima división de cada eje).

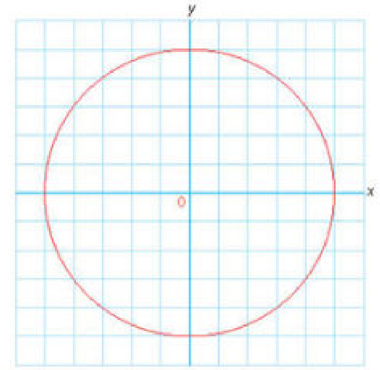


Figura 25.15

3. Tracen un segmento que vaya desde el origen hasta la circunferencia (figura 25.16)

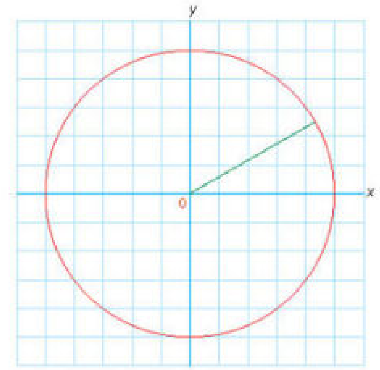


Figura 25.16

Aplica las TIC (*continuación*)

4. Tracen una perpendicular al eje *x* que pase por el punto de intersección del segmento con la circunferencia. Ver figura 25.17.

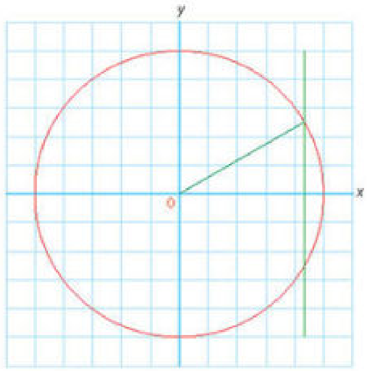


Figura 25.17

5. Traza el triángulo rectángulo, oculta la recta y configura la computadora para que te indique la amplitud del ángulo (figura 25.18).

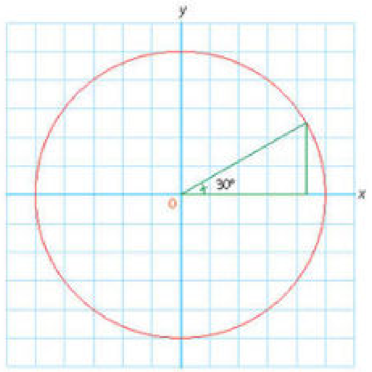


Figura 25.18

6. Configura la computadora para que te indique las medidas de los catetos y de la hipotenusa (figura 25.19).

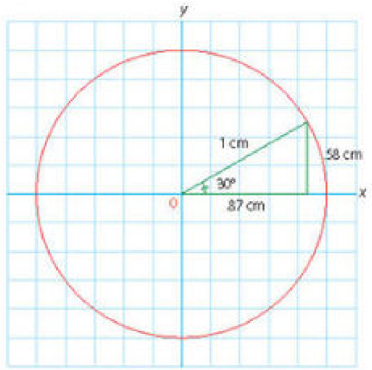


Figura 25.19

Aplica las TIC (*continuación*)

7. Configuren la computadora para que calcule las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, y dejen estos cálculos a la vista (figura 25.20).

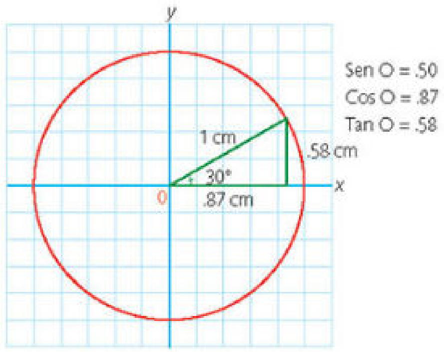


Figura 25.20

8. Muevan el vértice del triángulo que está sobre la circunferencia y analicen cómo varían las funciones y los catetos (figura 25.21).

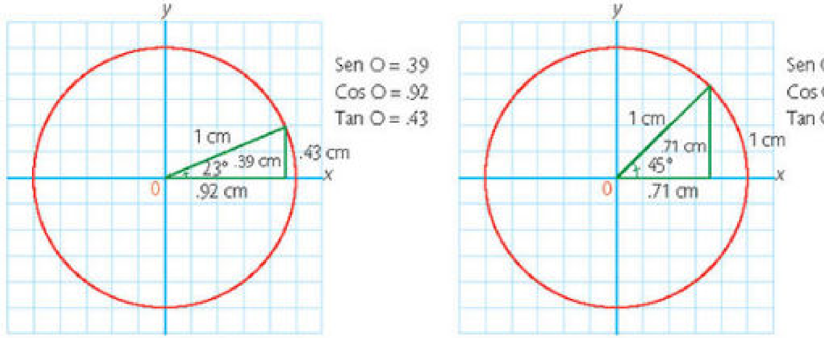


Figura 25.21

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

El número tres

Este número aparece repetidas veces en el estudio de los triángulos.

Triángulo significa tres ángulos.

Trilátero significa tres lados.

Figura 25.22

Hay tres diferentes tipos de triángulos si se clasifican por sus lados: equiláteros, isósceles y escalenos.

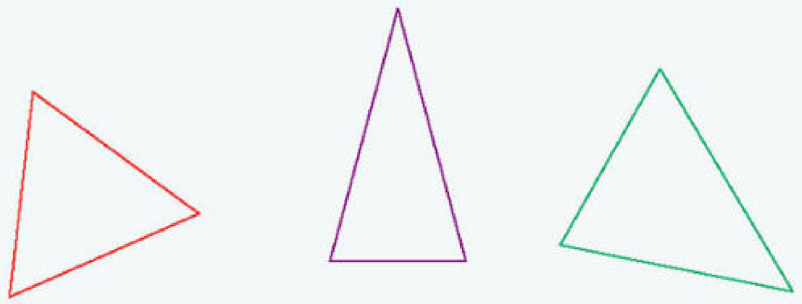


Figura 25.23

Hay tres diferentes tipos de triángulos si se clasifican por sus ángulos: acutángulos, rectángulos y obtusángulos.

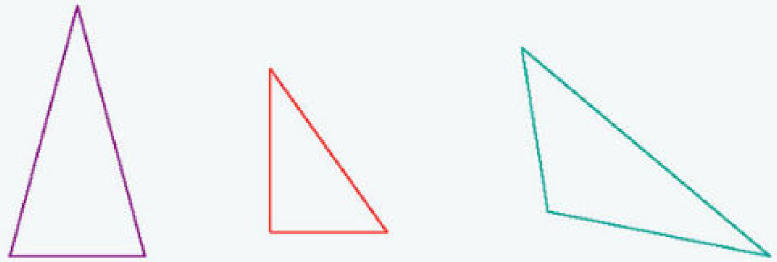


Figura 25.24

Trigonometría significa el estudio de la medida de tres ángulos, esto está relacionado con los tres elementos que aparecen en un triángulo rectángulo: cateto, cateto e hipotenusa.

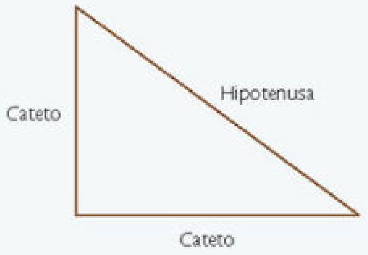


Figura 25.25

Estos tres elementos se relacionan para formar las tres principales razones en un triángulo rectángulo: seno, coseno, tangente.

Los ángulos que más se usan de referencia al emplear las funciones trigonométricas son los de 30, 45, 60, 90 grados, y todos son múltiplos de tres.

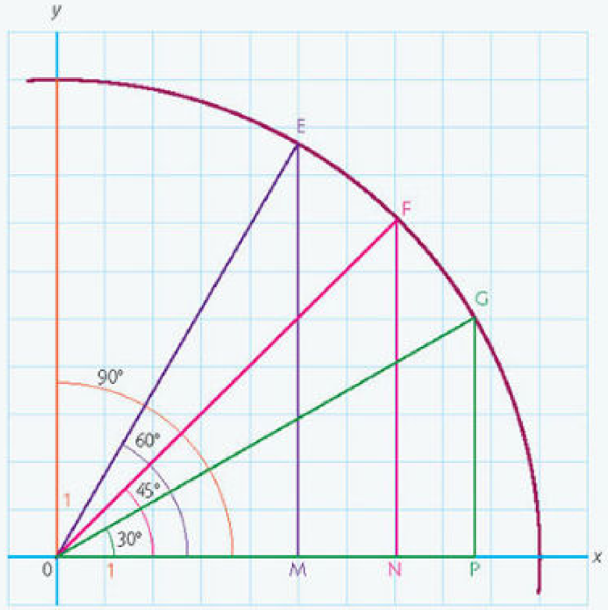


Figura 25.26

La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180° y este número es múltiplo de tres.

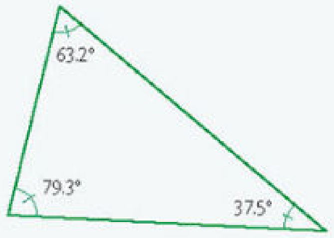


Figura 25.27

Y tú, ¿conoces otra relación en la que aparezca el número tres? Platícalo en el grupo.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la aplicación de las funciones trigonométricas seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan). Comenten en grupo su resumen.

Lección 26

¿Quién va más rápido?

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Para recordar

Los peces tropicales que está cuidando Carlos –que pertenecen a su hermana Alejandra– han consumido las siguientes cantidades de alimentos, según los días transcurridos:

Número de días	5	6	7
Alimento (g)	20	24	28

Tabla 26.1

Elabora en tu cuaderno una gráfica con los datos anteriores.
¿Cuánto alimento consumen por día? ______
Si continúan comiendo como hasta ahora, ¿cuántos gramos serán necesarios para alimentarlos durante 10 días? ______

Comenten sobre esta situación con su profesor.

RETO

Resuelvan lo siguiente por equipos.

Juan y Alonso van a correr un maratón. En sus entrenamientos de ayer, ambos corrieron durante dos horas. Corrieron a velocidad constante y registraron la distancia recorrida cada 10 minutos, por que les interesa analizar lo que sucede en lapsos de ese tiempo. Hicieron las siguientes gráficas, para comparar sus distancias recorridas:

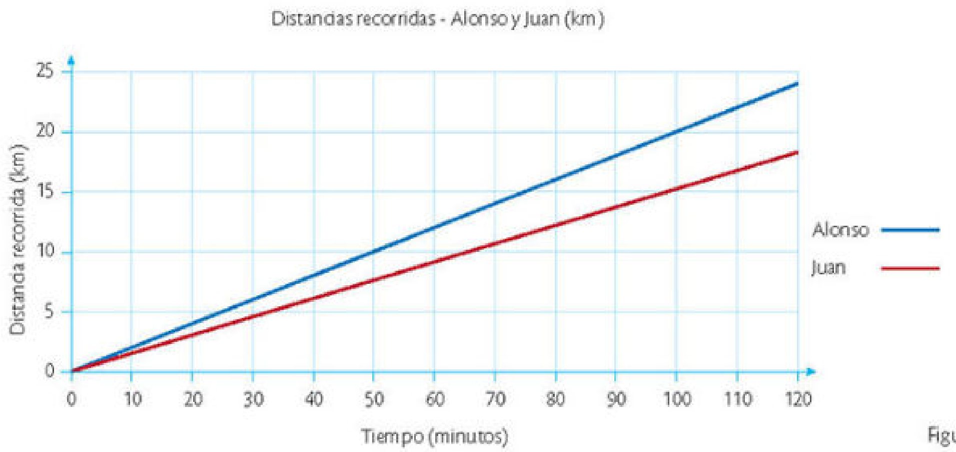


Figura 26.1

¿Cuál fue la distancia total que cubrió Alonso? ______
¿Cuánto aumentó la distancia recorrida por Alonso, del minuto 30 al 60? ______
¿Cuánto cambió del minuto 60 al minuto 90? ______
Durante esta media hora. ¿Cuánto aumentó la distancia recorrida por Alonso en cada lapso de 10 minutos? ¿Los aumentos son iguales o diferentes? ______

Efectúa cálculos similares para el entrenamiento de Juan con base en los datos de la gráfica. ______

Comparen los resultados que obtuvieron para Juan con los de Alonso; comenten en el grupo.
Ahora compara las dos gráficas.
¿Cómo son los aumentos en la distancia recorrida por Alonso y Juan? ______

¿Qué encuentras de diferente y en común en las gráficas de estos deportistas? ______

Comparen sus observaciones sobre esta situación y comenten con su profesor.

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden ser útiles al resolver el reto:
- ¿Cómo determinas las coordenadas de un punto sobre una línea en un plano cartesiano?
- Si tienes dos puntos sobre una línea, ¿cómo encuentras el incremento en la variable dependiente?, ¿y para la variable independiente?

Formalización

Con base en los datos de la gráfica de Alonso, ¿cuál era la distancia que Alonso llevaba recorrida a los 60 minutos? ______ ¿Y a los 80 minutos? ______

De acuerdo con lo anterior, ¿cuál es el incremento en la distancia recorrida por Alonso? ______
¿Cuántos lapsos de 10 minutos transcurrieron? ______
¿De cuánto es el incremento en distancia recorrida por Alonso, por cada lapso de 10 minutos?

Marca en la gráfica las dos cantidades que comparaste. ¿Cómo puedes describir en la gráfica la relación entre los incrementos de las dos cantidades, en la distancia y en el tiempo? ______

GLOSARIO

Razón de cambio

Cuando entre dos variables existe una relación lineal, la razón de cambio de la variable dependiente con respecto a la independiente es el cociente:

$$\frac{\text{Cambio en la variable dependiente}}{\text{Cambio en la variable independiente}} = \text{Razón de cambio}$$

Nos indica cuánto aumenta (o disminuye) la variable dependiente, por cada unidad de cambio en la otra variable.
La gráfica que representa una relación lineal es una línea recta. La razón de cambio expresa qué tan rápido aumenta (o disminuye) la línea, es decir, qué tanto sube (o baja) por una unidad de aumento en el eje horizontal. La razón de cambio es una medida de la inclinación de la recta: mientras mayor sea la razón de cambio, más rápido aumenta o sube la recta por cada unidad de la variable en el eje x.

¿Cuál es la razón de cambio para Juan por cada lapso de 10 minutos? ______
Compara las dos razones de cambio, ¿cuál es mayor? ______
¿Qué representan estas dos razones de cambio? ______

Ahora observa la gráfica. Las dos rectas que representan las distancias recorridas ¿tienen la misma inclinación o son diferentes? ¿Qué significa esto? ______

La línea recta que representa el recorrido de Alonso ¿va por encima o por abajo de la recta que representa la distancia recorrida por Juan? ______

Y al final de las dos horas ¿qué distancias totales recorrió cada quien, según lo que nos indica la gráfica? ¿Quién recorrió mayor distancia? ¿Por cuánto? ______

Compara estos resultados con las dos razones de cambio que obtuviste anteriormente. Explica tus observaciones. ______

Compartan entre equipos y con su profesor sus resultados y observaciones sobre todo este ejercicio.

Todos los cálculos de razones de cambio y de inclinaciones de las rectas también se pueden efectuar por minuto, en lugar de tomar lapsos de 10 minutos, como se hizo arriba. ¿Cuáles son las razones de cambio de Alonso y Juan por cada minuto de su carrera de entrenamiento? ______

UN NUEVO RETO

Eloísa está siguiendo el régimen alimenticio que le recomendó su nutrióloga. Cuando empezó pesaba 72 kg, y su meta era bajar 8 kg de manera gradual. En la gráfica siguiente se muestra cómo ha cambiado su peso a lo largo de las seis semanas que lleva con su nueva alimentación (el corte o discontinuidad en el eje de las *y*, indica que no están incluidos o representados en el dibujo todos los valores de dicho eje, cada división del eje representa 1 kg, pero debido al corte, se pasa de 2 kg a 63 kg).

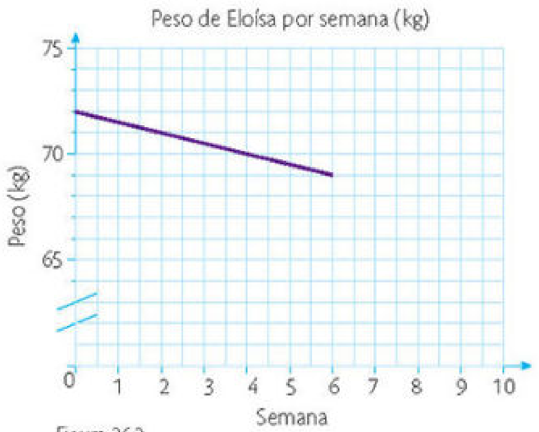


Figura 26.2

Con base en los datos de la gráfica, ¿cuánto pesaba Eloísa al final de la cuarta semana? ______
¿Cuánto cambió en total el peso de Eloísa entre la segunda y la cuarta semanas? ______
Calcula la razón de cambio del peso de Eloísa por semana, entre la segunda y la cuarta semanas. ______
¿Cuál es la razón de cambio del peso de Eloísa por semana, durante las seis semanas que lleva en su nuevo régimen? ______ ¿Es igual o tiene cambios durante este periodo? Explica. ______

¿Cuál es la relación entre la razón de cambio y la pendiente o inclinación de la línea recta? ______
Si Eloísa continua bajando de peso como lo ha hecho hasta ahora, ¿en cuánto tiempo habrá llegado a disminuir los ocho kilogramos que desea bajar en total? Explica. ______

Compartan sus respuestas y argumentaciones, y comenten con su profesor.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

A. El hermano de Santiago es mesero en un restaurante. Ayer anotó el importe de las cuentas y las propinas que recibió en tres de las mesas que atendió:

Cuentas del restaurante ($)	450	375	200
Propinas ($)	54	45	24

Tabla 26.2

Con base en estos datos, elabora en tu cuaderno la gráfica donde se representen estas dos variables; une los puntos con una línea.

a. ¿Cuánto aumenta la propina cuando se incrementa la cuenta de los clientes del restaurante?
b. ¿Cuánto aumenta la propina por cada peso de la cuenta?
c. Calcula la razón de cambio de las propinas con respecto a las cuentas.

B. Daniel está vendiendo los CD que grabó con sus compañeros músicos, Cristina y Arturo. Quiere saber qué pasaría si aumenta el precio de los discos. La gráfica a continuación representa la relación entre el número de discos vendidos y el importe de las ventas, al precio actual que es de $90 y al nuevo precio que sería de $120:

Figura 26.3

Calcula la razón de cambio del importe de las ventas en relación con el número de discos vendidos para ambos precios de venta.

a. ¿Cuál es el aumento en ingresos por un disco más que se venda?
b. ¿Cuál razón de cambio es mayor?
c. ¿Qué relación hay entre las pendientes de las rectas?, ¿cuál es mayor?
d. ¿Qué relación hay entre razones de cambio y precios de venta de los CD?

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

C. El auto de Martín recorre 17 kilómetros por cada litro de gasolina de manera constante. Completa la tabla 26.3 que relaciona la gasolina que consume con los kilómetros que recorre:

Gasolina usada (litros)	0	1	2	5	10	20
Distancia recorrida (kilómetros)	0	17				

Tabla 26.3

Con base en los datos de la tabla, elabora una gráfica donde se relacionen las dos variables: gasolina y distancia. Si los puntos están sobre una recta, traza la línea que los une.

a. Observa la gráfica: ¿cómo es la inclinación o pendiente de la recta?

b. Cuando aumenta la cantidad de gasolina, ¿cómo cambia la distancia recorrida, aumenta o disminuye?

c. Obtén la razón de cambio de la distancia en relación con la gasolina utilizada: ¿cuántos kilómetros más se recorren por un litro más de gasolina? ¿A qué otra cantidad corresponde esta razón de cambio?

El tío de Martín tiene una camioneta que recorre seis kilómetros por litro de gasolina. Elabora en tu cuaderno la tabla y la gráfica para el vehículo del tío. Compara las rectas y las razones de cambio.

Aplica las TIC

En la gráfica siguiente se muestran los costos de servicios telefónicos proporcionados por dos compañías diferentes.

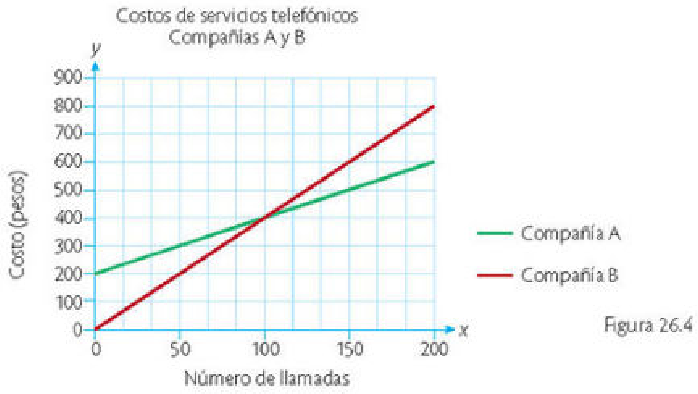


Figura 26.4

Con base en los datos de la gráfica, elabora dos tablas, cada una con los datos de una de las compañías; calcula en ellas las razones de cambio para cada incremento en 50 llamadas.

En la compañía A, ¿los incrementos de 51 a 100 llamadas y de 101 a 150 cuestan lo mismo que el incremento de una a 50 llamadas, o los incrementos en costo son diferentes? ¿Y en la compañía B?

Compara la inclinación o pendiente de las dos líneas rectas. ¿Cuál es mayor? ¿La de la compañía A o la de la compañía B? ¿Qué significa esto?

¿Cuáles son las razones de cambio para cada empresa? ¿Cuál razón de cambio es menor?

¿Cuál es la relación entre la inclinación de las líneas en la gráfica y las razones de cambio para las dos compañías?

El costo para cierto número de llamadas es igual en las dos empresas, ¿para qué cantidad de llamadas sucede esto? Explica por qué.

Lectura

La depreciación

Algunos equipos, como automóviles y computadoras, pierden valor como consecuencia de su uso, porque con el transcurso del tiempo aparecen nuevos modelos que frecuentemente hacen que los anteriores sean obsoletos o limitados. Por ejemplo, una computadora de escritorio que se adquiere por $20 000, después de cuatro años de uso puede venderse por sólo $2 000. Este proceso de pérdida de valor se conoce como depreciación.

En las empresas y entre particulares, para fines de cálculo de impuestos y para reponer los equipos, generalmente se considera que la pérdida de valor es constante cada año. El proceso se representa por una línea recta. Por ejemplo, el caso de la computadora antes mencionado sería como se muestra en la siguiente gráfica:

Figura 26.5

Como puedes observar, la recta está inclinada hacia abajo, es decir, que al aumentar la cantidad del eje horizontal, la cantidad del eje vertical no aumenta, sino que disminuye. Por este motivo, la razón de cambio es negativa. Lo anterior sucede en todos los casos de depreciación.

¿Puedes mencionar otras situaciones similares?

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la razón de cambio de un proceso que se modela con una función lineal, así como la relación entre la razón de cambio y la pendiente de la recta que la representa. Comenten en grupo su resumen.

Lección 27 ¿Quién salió mejor?

Tema: Análisis y representación de datos

Contenido: Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la desviación media con el rango como medidas de dispersión.

Para recordar

Minerva camina para estar en buena condición física. Las distancias que recorrió la semana pasada fueron de 3.4, 2.5, 4.7 y 3.2 kilómetros. ¿Cuál fue la distancia media de sus recorridos en esa semana?

¿Entre qué valores tiene que estar la media? __________

¿La distancia media recorrida por Minerva podría ser de cinco kilómetros? __________

Para determinar el valor de la media aritmética, ¿es necesario tomar en cuenta todos los datos o sólo algunos? Explica. __________

Comenten en el grupo y con su profesor.

RETO

El profesor de música de la escuela Pablo Moncayo aplicó un examen a sus alumnos de tercero; obtuvieron las siguientes calificaciones:

Alumnos: 5, 7, 10, 5, 9, 7, 7, 10, 9, 8, 8, 8, 7, 8, 6, 6

Alumnas: 7, 9, 8, 6, 9, 8, 9, 7, 7, 6, 7, 6, 7, 8, 8, 8

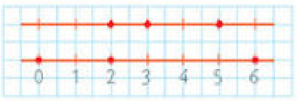
Al ver los datos, una alumna comenta que las mujeres salieron mejor, porque ninguna de ellas sacó cinco. Los alumnos, por su parte, dicen que dos de ellos sacaron 10, por lo que afirman que les fue mejor.

¿Cuál es la media aritmética de las calificaciones de los alumnos? __________

¿Y de las alumnas? __________ ¿Quiénes obtuvieron el mejor promedio?

GLOSARIO

Separación o dispersión. Los datos de un conjunto están más separados o dispersos, cuando están menos próximos o juntos unos de otros. Por ejemplo, los datos del conjunto inferior tienen más separación o dispersión que los del conjunto superior:



Describe cómo es la separación o dispersión de las calificaciones entre los alumnos y entre las alumnas; compara los dos conjuntos a este respecto. __________

¿Cómo medirías qué tan dispersos o separados están los datos en cada conjunto (entre las alumnas y entre los alumnos), tomando como referencia la media aritmética? __________

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden ser útiles al resolver el reto.

¿Alguien sacó más de nueve entre las alumnas? ¿Y entre los alumnos?

¿Cuál es la calificación más alta y más baja obtenida por una mujer del grupo? ¿Y cuál es la de los hombres?

¿Cómo puedes conocer la media de las calificaciones entre los alumnos? ¿Y entre las alumnas?

Formalización

Cuando tenemos dos conjuntos de datos y necesitamos compararlos en segundo grado, recurrimos principalmente a las medidas de tendencia central: la media aritmética y la mediana. Aquí vamos a utilizar solamente la primera.

¿Cuáles son las medias de las calificaciones? Alumnas: __________

Alumnos: __________

No siempre es conveniente llegar a una conclusión con base sólo en la media. Veamos qué información adicional sobre ambos conjuntos de calificaciones podemos obtener de sus histogramas:

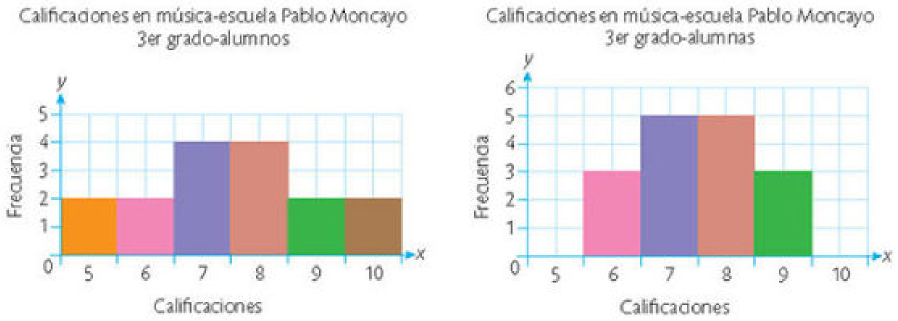


Figura 27.1

¿Qué observas al comparar los dos histogramas? __________

¿En cuál de los dos grupos las calificaciones están más cercanas o próximas a la media aritmética? __________ ¿En cuál están más separados o alejados de la media? __________

Una primera forma de medir la separación o concentración de las calificaciones se basa simplemente en la anchura o amplitud de la gráfica. Cuál es la calificación más alta y la más baja de los alumnos? __________ ¿Entre qué valores están todas sus calificaciones? __________

A esta forma de medir la dispersión entre los datos de un conjunto, se le llama rango.

GLOSARIO

Rango. En un conjunto de datos, es la diferencia entre el mayor y el menor dato.

Otra forma de medir la dispersión consiste en tomar como referencia la media aritmética. ¿Cómo se puede calcular la distancia de un dato a la media aritmética, es decir, de un punto a otro en el eje horizontal de la gráfica? Explica. __________

GLOSARIO

Valor absoluto. Es el valor de un número sin tomar en cuenta su signo. Por ejemplo, el valor absoluto de −8 es 8 y se escribe |−8|.

La distancia que existe entre dos números es igual al valor absoluto de su diferencia.

Por ejemplo, la distancia entre una calificación de seis y la media de 7.5 es de: ________

Para esta segunda forma de medir la dispersión y para el caso de los alumnos:

- Se obtiene el valor absoluto de la diferencia de cada dato con respecto a su media aritmética, los cuales se suman:

$$|5 - 7.5| + |5 - 7.5| + |6 - 7.5| + \ldots$$

- El total anterior se divide entre el número de datos; de esta manera lo que se obtiene es la media aritmética de las distancias de cada dato respecto de la media del conjunto de datos original; su valor es de: ________
- A esta nueva forma de medir la dispersión se le llama desviación media.

GLOSARIO

Desviación media. Para calcularla, primero se suman los valores absolutos de las diferencias de cada dato con respecto a la media aritmética del conjunto; a continuación se divide esta suma entre el número de datos del conjunto.

Medidas de dispersión. El rango y la desviación media son dos formas de medir la separación o dispersión entre los datos de un conjunto; por ello se conocen como medidas de dispersión.

Obtén la desviación media para las calificaciones de las alumnas: ________

Ahora ya tenemos los rangos de los dos conjuntos de datos, de los alumnos y de las alumnas; compáralos entre sí. ________

También compara entre sí las dos desviaciones medias. ________

¿Consideras que una medida de dispersión u otra –o ambas– te dan una idea de la separación o dispersión de los datos en cada conjunto, de qué tan juntos o separados están? ________

¿Hay alguna diferencia entre las dos medidas de dispersión? Explica. ________

Compartan sus resultados y observaciones, y comenten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Obtén la media aritmética, el rango y la desviación media para cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

Conjunto de datos	Media aritmética	Rango	Desviación media
3, 4, 5	4	2	
1, 4, 7			
3, 6, 9			
3, 4, 14			

Tabla 27.1

También ubica cada conjunto de datos sobre una recta numérica (utiliza tu cuaderno); señala la posición de sus respectivas medias aritméticas:

¿Cómo se concentran o separan los datos con respecto a su media aritmética? ________

¿Qué diferencias y similitudes puedes detectar? ________

Ahora compara la media, el rango y la desviación media de los conjuntos de datos. ________

¿Cómo se relacionan las medidas de dispersión con la separación de los datos en las rectas numéricas? Explica. ________

Compartan sus resultados y observaciones, y comenten con su profesor.

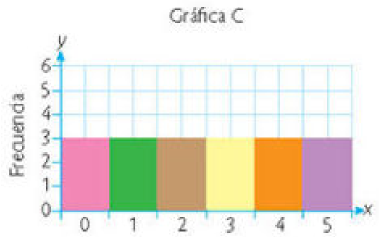
¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

A.

1. ¿En cuál de las gráficas siguientes es mayor la dispersión de los datos? Compara las gráficas y utiliza las medidas de dispersión (rango, desviación media).

Figura 27.2

2. Compara la dispersión de los datos en las gráficas siguientes. ¿Dónde es mayor? Observa las gráficas y utiliza las medidas de dispersión.



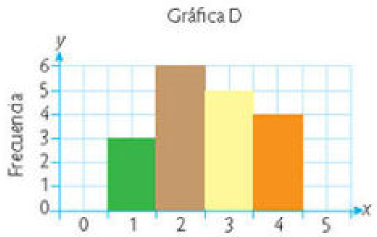


Figura 27.3

B. Julio César tiene que comprar nuevas llantas a su automóvil. Buscó información de varias marcas y obtuvo los datos siguientes sobre pruebas de duración de tres marcas diferentes (llantas de las mismas medidas, en los tres casos):

Marca	Duración media de las llantas probadas (kilómetros)	Rango de duración (kilómetros)	Desviación media de la duración (kilómetros)
A	60 500	50 000-73 000	6200
B	51 000	40 000-62 000	6100
C	60 300	35 000-82 000	11 200

Tabla 27.2

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

Con base en esta información solamente (sin tomar en cuenta los precios, por ejemplo), ¿cuál de las tres marcas le recomendarías comprar? Argumenta tu respuesta.

C. Las siguientes son las edades de las personas que han visitado han visitado dos sitios de internet durante un día (A y B). Calcula la media aritmética, el rango y la desviación media de las edades de quienes visitaron ambos sitios; elabora los correspondientes histogramas (agrupa los datos en categorías de 10 años de amplitud). Compara la distribución de edades de ambos sitios, con base en las gráficas y las medidas de dispersión.

Sitio A

18, 21, 24, 23, 56, 32, 67, 20, 13, 27, 28, 50, 42, 26, 59, 23, 10, 25, 25, 66, 31, 33, 63, 36, 12, 17, 29, 16, 35, 38, 35, 72, 44, 45, 40, 20, 14, 15, 25, 24, 30, 51, 25, 47, 34, 55, 54, 26, 27, 33, 27, 39.

Sitio B

30, 26, 35, 55, 22, 27, 33, 9, 29, 23, 20, 35, 66, 37, 9, 18, 60, 10, 24, 15, 32, 38, 17, 64, 14, 30, 34, 43, 40, 58, 22, 21, 52, 15, 25, 18, 20, 25, 44, 24, 45, 50

Aplica las TIC

Lleven a cabo la siguiente actividad por equipos. Para efectuar cálculos que no se realicen con la hoja electrónica de cálculo y para registrar observaciones y conclusiones, utilicen sus cuadernos.

Los siguientes son los números de libros leídos por alumno durante el año anterior. Se obtuvieron como resultado de una de las encuestas realizadas por los profesores de la escuela y corresponden a los alumnos de dos grupos de tercero.

Número de libros leídos por alumno los 12 meses anteriores:

Grupo A:

2, 10, 0, 0, 4, 7, 5, 9, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 3, 0, 0, 6, 7, 5, 0, 9, 2, 2, 3, 0, 0, 0, 3, 4, 7, 2

Grupo B:

12, 14, 3, 2, 1, 4, 6, 5, 3, 0, 1, 0, 6, 1, 7, 1, 8, 12, 10, 8, 1, 2, 1, 0, 5, 1, 5, 2, 8, 2

A. Realiza los siguientes pasos obtener la media aritmética, las medidas de dispersión y los histogramas para cada grupo con una hoja electrónica de cálculo en tu computadora.

1. Introduce los datos del grupo A en tu hoja electrónica de cálculo.
2. Escribe los siguientes rótulos:

En la celda:	Introduce el texto:
B4	Media aritmética:
B5	Rango:
B6	Desviación media:

Tabla 27.3

3. Selecciona la celda C4, luego la función estadística PROMEDIO. Finalmente selecciona las celdas donde colocaste los datos del grupo A para que aparezca la media en la celda C4.

Aplica las TIC (*continuación*)

4. Selecciona la celda C5, luego, MAX. Ahora selecciona las celdas donde colocaste los datos del grupo A. Regresa a la zona de fórmulas y teclea el signo menos (–). En el menú Fórmulas selecciona MIN, así como las celdas donde colocaste los datos del grupo A, de tal manera que aparezca el rango en la celda C5.
5. Selecciona la celda C6, luego DESVPROM. Ahora da clic en las celdas donde colocaste los datos del grupo A. Finalmente selecciona la celda C6 para que aparezca la desviación media.
6. Elabora la tabla de frecuencias de los libros leídos en el grupo A; agrupa en las siguientes categorías: ninguno, uno a cuatro, cinco a ocho, nueve a 12, más de 12.
7. Para elaborar el histograma, ve al menú Insertar Gráficos Columna, selecciona la primera opción.
8. Repite los pasos anteriores para los datos del grupo B, usando columnas de la D en adelante.

B. Una vez que dispongas de toda la información anterior:

1. Compara los datos de los dos grupos: histogramas, medias y medidas de dispersión.
2. ¿En cuál grupo indican las medias que se leyó más? ¿En cuál están más dispersos o concentrados los números de libros? ¿Hay diferencias entre las medidas de dispersión?

Comparen sus procedimientos y resultados entre equipos, y comenten con su profesor.

Lectura

La estadística y las medidas de dispersión

La palabra estadísticas se usa para referirse a un conjunto de cifras relativas a algún fenómeno, tema o actividad. En este sentido, la estadística es prácticamente tan antigua como los números.

Entendida como ciencia, la estadística incluye métodos útiles para hacer inferencias sobre el total de una población a partir de los datos (menos numerosos) de una muestra; en este sentido, se refiere también a los fundamentos matemáticos de dichos métodos.

La estadística se desarrolló, principalmente, a partir del siglo XVIII, debido a la necesidad de entender la gran cantidad de cifras que se acumulaban, sobre todo en relación con la población y la administración de los nuevos estados en Europa.

Así, puede decirse que la estadística es un conocimiento mucho más joven que la matemática en general. La mayoría de sus métodos actuales se generaron durante el siglo XIX y principios del XX, incluyendo las medidas de la dispersión de un conjunto de datos.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la medición de la dispersión de datos mediante el promedio de las distancias de la desviación media, y las diferencias de ésta con el rango como medidas de dispersión. Comenten en grupo su resumen.

Evaluación Bloque IV

Evalúa lo que aprendiste en el bloque IV, resolviendo los siguientes problemas.

La figura que sigue

Resuelve los siguientes problemas de sucesiones de figuras:

1. La siguiente sucesión de figuras (EIV.1, EIV.2, EIV.3) está formada con palillos.
   ¿Cuál es la expresión general que permite conocer el número de palillos de cualquier figura?

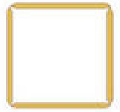


Figura EIV.1

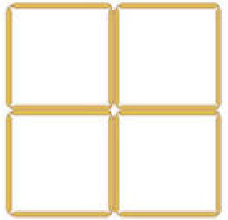


Figura EIV.2

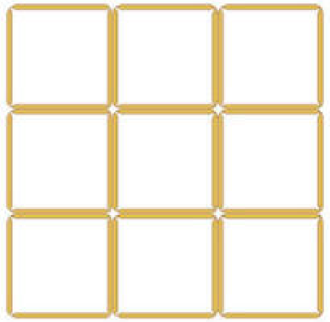


Figura EIV.3

(A) $2n^2 + 2n$ (B) $2n^2 + 2$ (C) $4n - 1$ (D) $n^2 + 3$

2. La siguiente sucesión de figuras (EIV.4, EIV.5, EIV.6) está formada por fichas.
   ¿Cuántas fichas tendrá la figura 8?

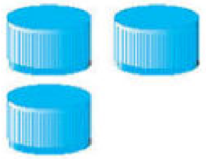


Figura EIV.4

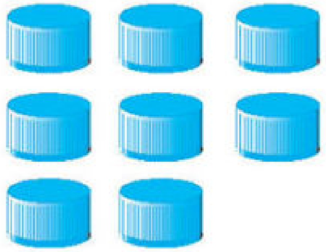


Figura EIV.5

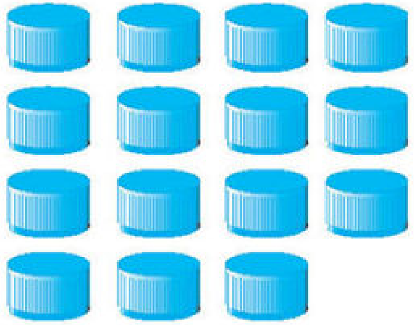


Figura EIV.6

(A) 24 (B) 35 (C) 48 (D) 60

¿Qué expresión algebraica permite encontrar el número de fichas de cualquier figura de la sucesión?

(A) $n^2 + n$ (B) $2n^2 + 2n$ (C) $n^2 + 2n$ (D) $3n + 2$

¿Qué posición ocupa la figura con 120 fichas?

(A) 12 (B) 8 (C) 5 (D) 10

Cilindros, conos y trigonometría

3. El lado AB del triángulo, al girar forma en el cono la:

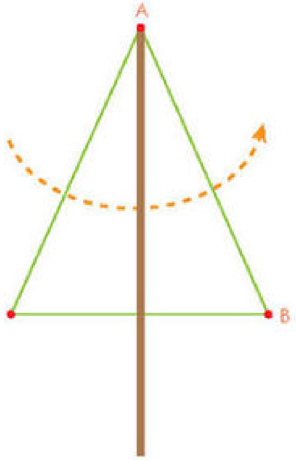


Figura EIV.7

(A) Generatriz (B) Altura (C) Base (D) Cúspide

4. Utiliza el siguiente círculo como base de la plantilla de un cono y termina de trazarla.

   a) Compara tu plantilla con la de algún compañero y escribe brevemente en tu cuaderno, en qué son iguales y en qué son diferentes y por qué. Comparen sus conclusiones.

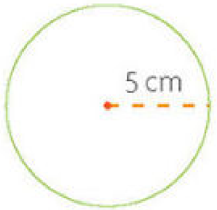


Figura EIV.8

5. ¿Cuál es la razón que define la pendiente de la recta $y = 0.75x + 3$?

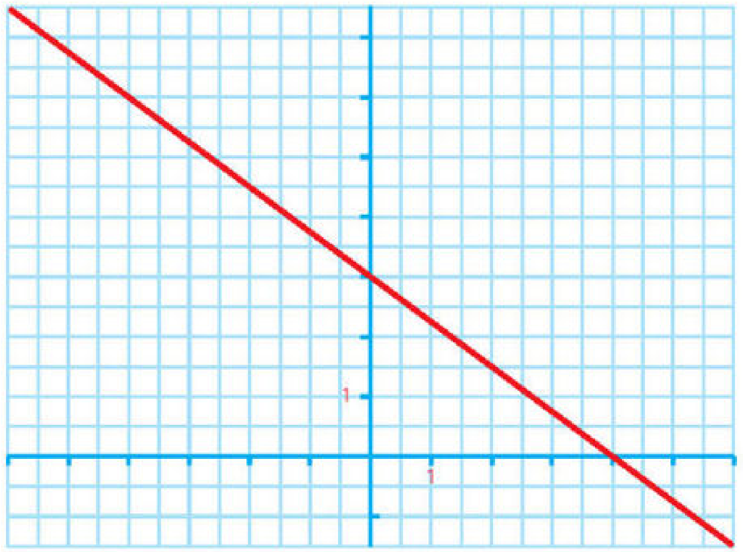


Figura EIV.9

Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{1}{4}$ Ⓒ $\frac{3}{4}$ Ⓓ $\frac{4}{3}$

6. Si el seno de un ángulo de 30 grados es igual a 0.5, ¿a qué es igual el coseno de su complemento?

Ⓐ 0.5 Ⓑ 0.75 Ⓒ 0.95 Ⓓ 1.00

7. Calcula la altura de la torre si desde una distancia de 50 m se observa su punto más alto con un ángulo de 60°.

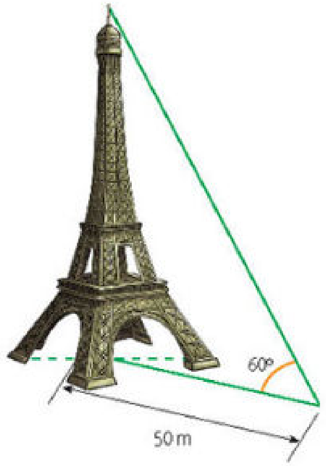


Figura EIV.10

Ⓐ 28.9 m Ⓑ 50 m Ⓒ 86.6 m Ⓓ 173 m

No deja de subir

8. En la gráfica se muestra el incremento en el precio de un artículo durante los primeros cinco meses del año:

Figura EIV.11

La razón de cambio del precio del artículo por mes es de:

Ⓐ 10 pesos por mes Ⓑ 5 pesos por mes

Ⓒ 2 pesos por mes Ⓓ 1.5 pesos por mes

Si el precio continúa aumentando con la misma razón de cambio, ¿cuál será el costo del artículo en el noveno mes del año?

Ⓐ \$ 88 Ⓑ \$ 90 Ⓒ \$ 86 Ⓓ \$ 100

Que no tarde mucho, porque se enfría

9. Un restaurante de pizzas ofrece el servicio de entrega a domicilio. El gerente desea obtener información acerca de qué tan variable es el tiempo de entrega. Para ello, anotó los tiempos de entrega de una tarde (en minutos): 27, 20, 33, 24, 15, 31

¿Cuál es la media aritmética del tiempo de entrega de las pizzas?

Ⓐ 24 minutos Ⓑ 25 minutos Ⓒ 28 minutos Ⓓ 30 minutos

¿Cuál es el rango de los tiempos de entrega de esa tarde?

Ⓐ 26 minutos Ⓑ 20 minutos Ⓒ 18 minutos Ⓓ 16 minutos

La desviación media de los tiempos de entrega es de:

Ⓐ 15 minutos Ⓑ 6.5 minutos Ⓒ 5.3 minutos Ⓓ 4.8 minutos

Un mes después, el gerente encuentra que la desviación media de los tiempos de entrega es de 3.5 minutos ¿Ha aumentado o disminuido la variación en los tiempos de entrega de las pizzas? Explica brevemente.

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de los contenidos de este bloque, el alumno:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Lección 28 La dolce vita

Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Para recordar

Resuelve las siguientes ecuaciones y sistema de ecuaciones:

a. $2x + 3y = 3$
$4x + 5y = 6$

b. $3x^2 - 5x + 2 = 0$

c. $10x + 4 = 7x + 7$

Compara tus respuestas con otros compañeros. Si tuvieron dificultades, traten de aclararlas entre todos.

RETO

Rocío tiene una dulcería llamada La Dolce Vita. Los dulces más vendidos son los chiclosos de chocolate y los caramelos multisabores, cuyo precio es de 22 y 30 pesos el kilogramo, respectivamente. Rocío quiere hacer una mezcla de estos dulces, de tal manera que pese 50 kilogramos y cuyo precio sea de 25 pesos cada uno. ¿Cuántos kilogramos de cada dulce debe mezclar?

Pistas

Para resolver el problema, plantea la ecuación o ecuaciones necesarias. Para determinar esto, lee nuevamente el problema y traduce las condiciones dadas a expresiones algebraicas.

- A partir de lo que te pide el problema, ¿cuántas incógnitas tienes?
- Simboliza y escribe tus ecuaciones.
- ¿De qué tipo es tu ecuación o ecuaciones?
- Escoge el método que quieras para resolverla.

Formalización

En tus cursos de matemáticas de secundaria has aprendido a resolver problemas planteando ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones.

Es importante que ante un problema:

- Reconozcas la incógnita, es decir, la cantidad cuyo valor desconoces, pero que es posible determinar tomando en consideración los datos del problema.
- Representes simbólicamente la cantidad desconocida, relacionándola con los datos del problema para desarrollar una expresión algebraica que refleje esta relación.
- Relaciones las expresiones algebraicas resultantes, de manera que obtengas una ecuación que represente matemáticamente el problema planteado.
- Realices las operaciones aritméticas o algebraicas que te permitan obtener el valor o los valores de la variable o variables de tu ecuación.
- Compruebes si los valores que obtienes son correctos y satisfacen tu ecuación y, por tanto, resuelven el problema.

En parejas, realicen estos pasos con el problema planteado en el reto. Una vez que hayan resuelto el problema, comparen con otros compañeros su ecuación o ecuaciones planteadas, y el método que siguieron para resolverla. Discutan las dificultades que tuvieron para plantear la ecuación o ecuaciones, y al resolverlas.
Concluyan si todos los procedimientos son iguales o alguno es mejor que otro.

UN NUEVO RETO

1. Los insectos poseen un sentido del olfato muy desarrollado en las antenas. Por ejemplo, las hembras de muchas especies de mariposas nocturnas dejan rastros de feromonas en la oscuridad que los machos pueden seguir a lo largo de kilómetros gracias a espectaculares antenas que filtran el aire nocturno.
Una mariposa hembra y una macho se encuentran en un mismo punto. La mariposa hembra vuela en línea recta en dirección norte, con una velocidad de 10 km por hora y la mariposa macho vuela en línea recta en dirección éste a una velocidad de 15 km por hora. Si la distancia máxima en que todavía pueden percibirse son 25 kilómetros, ¿en cuánto tiempo dejarán de percibirse?
Reúnanse en equipo para resolver el problema:
   a) Representen la situación con un dibujo
   b) ¿Es un problema que se resuelve con una ecuación lineal o cuadrática?
   c) ¿Cuál es la ecuación que resuelve el problema?
   d) ¿Después de cuánto tiempo dejarán de percibirse las dos mariposas?
2. En equipo, inventen problemas para cada una de las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y resuélvanlas:
   1. $x + 48 = 121$
   2. $6x + 8 = 10$
   3. $x + y = 5$
   $x - y = 1$
   4. $x^2 + 2x - 8 = 0$

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

Resuelve los siguientes problemas utilizando los pasos mencionados en la sección de Formalización:

A. En un concierto de rock, los boletos para estudiante cuestan 20 pesos y los de no estudiante, 40 pesos. Si se vendieron 200 boletos y el total recabado fue de $7 500. ¿Cuántos boletos de estudiante se vendieron?
B. José caminó hacia el centro de la ciudad a un ritmo de 4 km/h y regresó a 3 km/h. ¿Cuántos kilómetros caminó si tardó 3.5 horas en el viaje redondo?
C. El producto de dos números consecutivos es 380. ¿Cuáles son esos números?
D. La suma de tres números enteros consecutivos impares es −21. ¿Cuáles son esos números?
E. La suma de dos números es 567 y su diferencia es 113. ¿Cuáles son esos números?
F. Las dimensiones de un rectángulo son 20 cm de ancho y 30 cm de largo. Cada lado del rectángulo se incrementa en la misma proporción para originar un nuevo rectángulo, con el doble del área del original. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo rectángulo?
G. En una clase hay 70 alumnos; si el número de mujeres excede en diez al doble del número de hombres. ¿Cuántos hombres y mujeres hay?
H. Se tiene un triángulo cuya altura es de 3 cm mayor que su base. ¿Cuál es la medida de la base del triángulo, si su área es de 5 cm^2?
I. Un conjunto de personas rentó un auto para hacer un viaje en $1 200 pesos. Tres personas no fueron al viaje, por lo que los demás debieron pagar $20 pesos más de lo que originalmente iban a pagar. ¿Cuántas personas iban a hacer el viaje en un inicio?

Aplica las TIC

En lecciones anteriores has trabajado también con ecuaciones lineales y cuadráticas que modelan una situación, y se ha dicho que es importante poder representarlas de diversas formas. En la siguiente figura se muestra una tabla con los valores de la distancia que recorre un objeto que se suelta en caída libre, desde el edificio más alto de una ciudad, en relación con el tiempo que transcurre. Recuerda que en la lección cinco estudiaste la función de la caída libre: $\frac{1}{2}gt^2 = d$.

Elabora una hoja electrónica de cálculo, igual a la que se muestra, determinando la expresión algebraica (fórmula) que te genera esa tabla de datos; posteriormente, grafícalos para que así modeles esta situación a través de una expresión algebraica, una tabla y su gráfica correspondiente.

Si requieres ayuda para obtener la gráfica, pregunta a tu profesor cómo hacerlo.

	A	B
1	Tiempo es segundos	Distancia entre el punto inicial hacia el suelo en metros
2	0	0
3	1	4.9
4	2	19.6
5	3	44.1
6	4	78.4
7	5	122.5
8	6	176.4
9	7	240.1
10	8	313.6
11		
12		

Figura 28.1

Lectura

La ecuación más conocida

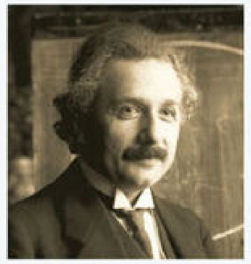


Figura 28.2 Albert Einstein recibió el Premio Nobel de Física, en 1921, por sus aportaciones a la física teórica y, especialmente, por el descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico.

Albert Einstein (1879–1955) fue un físico alemán de origen judío, nacionalizado estadounidense, premiado con un Nobel de Física en 1921. Es considerado uno de los mayores científicos de todos los tiempos. Sus trabajos fueron trascendentales para el desarrollo de la física e influyeron en el pensamiento occidental en general. En 1905 escribió tres artículos que transformaron muchas ideas en física. Los artículos trataban de la naturaleza de la luz, describían el movimiento molecular e introducían la teoría de la relatividad restringida. Einstein es famoso por replantearse continuamente suposiciones científicas tradicionales y sacar conclusiones sencillas a las que nadie había llegado antes. No es conocido tanto su compromiso social, aunque era un ardiente pacifista.

Como una conclusión de su teoría especial de la relatividad, Einstein había propuesto a principios del siglo XX que la masa y la energía no eran más que dos aspectos diferentes de una misma cosa, y que, por lo tanto, la masa se podría transformar en energía, y la energía, en masa bajo ciertas circunstancias. Esta transformación vendría recogida en una ecuación:

$$E = mc^2$$

Esta ecuación es quizá la más conocida de toda la física moderna, cuya expresión significa que, con mecanismos adecuados, una cierta cantidad de masa m se puede transformar en una cantidad de energía E, cuyo valor viene dado por el valor de la masa multiplicado por el cuadrado del valor de la velocidad de la luz (c^2) en el vacío (estimada en 300 000 k/s). La velocidad de la luz es tan rápida que, por muy pequeña que sea la masa transformada, la cantidad de energía obtenida será considerable. Una aplicación directa de este conocimiento es la energía *atómica*.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes seguro, con respecto a la resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones Comenten en grupo su resumen.

Lección 29 ¡Qué cortados!

Tema: Medida

Contenido: Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Para recordar

1. En parejas, observen los polígonos y con un trazo transfórmenlos en lo que se pide:

Figura 29.1

Comparen sus trazos y, en caso de dudas, hagan alguno de los ejercicios en el pizarrón.

RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Catalina y Víctor están haciendo diferentes tipos de cortes. Catalina hace cortes en algunos cilindros que construyó para ese fin.

Figura 29.2

¿Qué figuras resultarán de los cortes? ______

¿De cuántas formas diferentes podrá cortar el cilindro Catalina? ______

¿Podrá Catalina cortar el cilindro en una posición diferente a las ilustradas? ______

¿Por qué? ______

Víctor hace cortes en conos que construyó.

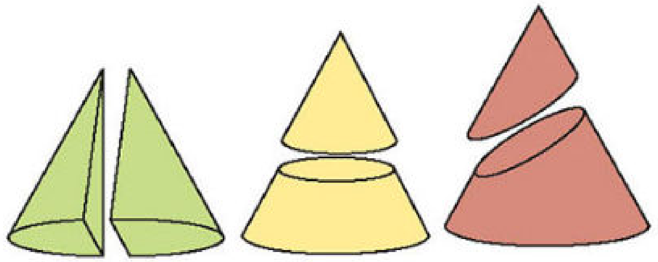


Figura 29.3

¿Qué figuras resultarán de los cortes? ______

¿De cuántas formas diferentes podrá cortar el cono Víctor? ______

¿En qué posiciones respecto a la base cortó el cono Víctor?

Comenta con tus compañeros y profesor cómo llevar a cabo la investigación para dar respuesta a las preguntas.

Pistas

En parejas, construyan algunos cilindros y conos con plastilina o con otro material que se pueda cortar con facilidad (unicel, por ejemplo).

Tengan a la mano un cúter o algún objeto con el que puedan cortar los cuerpos geométricos, así como hojas de papel y un lápiz.

Figura 29.4

Hagan los cortes con mucho cuidado y bajo la supervisión de un adulto. Empiecen con el cilindro. Hagan dos cortes en el mismo sentido y anoten la forma en que lo cortaron, por ejemplo, paralelos a la base.

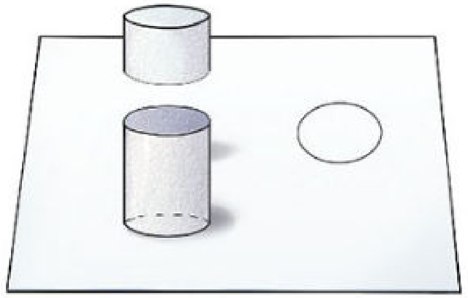


Figura 29.5

Pistas (*continuación*)

Coloquen la parte cortada sobre un papel y dibujen la forma resultante.

Prueben con otros tipos de corte y cada vez anoten la forma en que lo cortaron y la forma resultante.

Procedan en la misma forma con el cono.

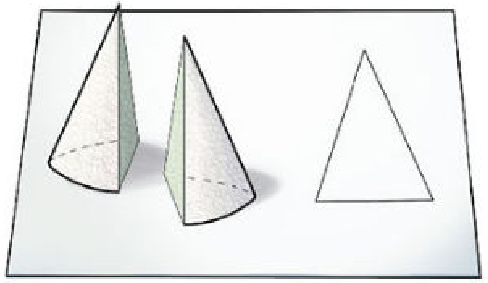


Figura 29.6

Expongan su trabajo en el grupo y comparen los cortes, así como las figuras resultantes de otros compañeros y equipos y, pregunten en caso de que tengan alguna duda

Formalización

En el cono los cortes pueden ser paralelos, perpendiculares u oblicuos con respecto a la base o al eje de revolución.

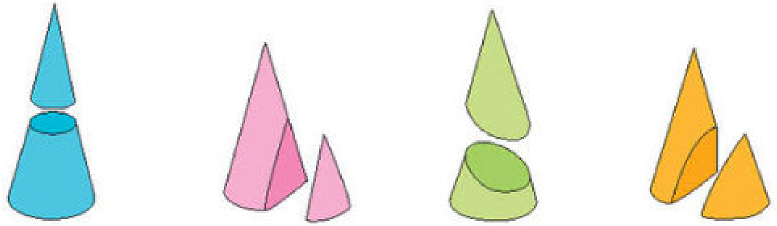


Figura 29.7

En el cilindro los cortes pueden ser paralelos, perpendiculares u oblicuos con respecto a la base o a la altura.

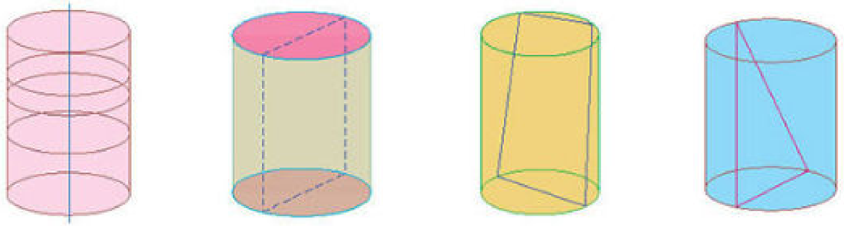


Figura 29.8

Cuando se realizan los cortes en conos o cilindros pueden surgir algunas figuras como triángulos, rectángulos, círculos, elipses y parábolas.

Analicen en grupo los diferentes cortes que se pueden hacer en un cilindro y en un cono y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Coloquen un cono en un recipiente transparente marcado cada 0.5 cm.

Agreguen agua hasta la primera marca.

Dibujen la figura que forma el agua en la unión con el cono y calculen su radio.

Calculen el volumen del cono que queda fuera del agua.

Conforme se desarrolle el ejercicio llenen la siguiente tabla.

Conos	Radio	Altura	Volumen
Original			
Primera marca			
Segunda marca			
Tercera marca			
Cuarta marca			
Quinta marca			

Tabla 29.1

Comenten en el grupo la variación que hay entre el radio y la altura.

Expongan su trabajo en el grupo y, en caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

En parejas, contesten las preguntas.

1. Termina de llenar la siguiente tabla, observa semejanzas y diferencias, y coméntalo con tus compañeros:

Cuerpo geométrico	Cómo lo corté	Qué figura se formó con el corte	¿Cambia la forma del primer corte si se continúa con cortes paralelos?
Cilindro			
Cono			
Cilindro			
Cono			

Tabla 29.2

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

2. Hagan diversos cortes paralelos y oblicuos en el cilindro y en el cono; por ejemplo, con respecto a la base. Observen las formas que resultan de los cortes, y dibújenlas en su cuaderno.
3. Traten de hacer alguno de los poliedros arquimedianos que se mencionan en la sección de Lectura.

Muestren sus cortes de los cuerpos geométricos a sus compañeros y, en caso necesario, analicen algunos en el grupo.

Aplica las TIC

	A	B	C
1	Volumen de conos formados cuando la altura original disminuye cada vez .5 cm		
2	Radio	Altura	Volumen
3	4.0	12	50.24
4	3.8	11.5	44.22
5	3.7	11	38.7
6	3.5	10.5	33.66
7	3.3	10	29.07
8	3.2	9.5	24.83
9	3.0	9.0	21.2
10	2.8	8.5	17.86
11	2.7	8.0	14.89
12	2.5	7.5	12.27
13	2.3	7.0	9.97
14	2.2	6.5	7.98
15	2.0	6.0	6.28
16	1.8	5.5	4.84
17	1.7	5.0	3.63
18	1.5	4.5	2.65
19	1.3	4.0	1.86
20	1.2	3.5	1.25
21	1.0	3.0	0.79
22	0.8	2.5	0.45
23	0.7	2.0	0.23
24	0.5	1.5	0.10
25	0.3	1.0	0.03
26	0.2	0.5	0.00
27	0.0	0.0	0.00

Figura 29.9

En parejas, elaboren una hoja electrónica de cálculo para observar la variación del radio de un cono, cuando la altura original de 4 cm va disminuyendo cada vez 0.5 cm.

Observen la gráfica 29.10 que se forma con los datos de la tabla (figura 29.9) y contesten la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de variación existe entre la relación de la altura y el radio? __________

En la figura 29.11 se muestra una hoja electrónica de cálculo con las fórmulas utilizadas para su construcción.

Observen las fórmulas y digan ¿qué método se utilizó en la hoja electrónica para calcular el radio resultante, al disminuir la altura del cono? __________

¿Cómo lo saben? __________

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

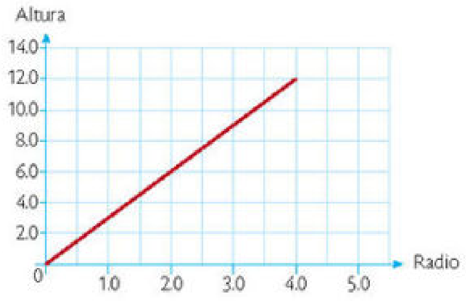


Figura 29.10

	A	B	C
1–4	Volumen de conos formados cuando la altura original disminye cada vez .5 cm		
5	Radio	Altura	volumen
6	4	12	=(3.14*(A6/2)*(A6/2)*B6)/3
7	=B7*A6/B6	=B6-0.5	=(3.14*(A7/2)*(A7/2)*B7)/3
8	=B8*A7/B7	=B7-0.5	=(3.14*(A8/2)*(A8/2)*B8)/3
9	=B9*A8/B8	=B8-0.5	=(3.14*(A9/2)*(A9/2)*B9)/3
10	=B10*A9/B9	=B9-0.5	=(3.14*(A10/2)*(A10/2)*B10)/3
11	=B11*A10/B10	=B10-0.5	=(3.14*(A11/2)*(A11/2)*B11)/3
12	=B12*A11/B11	=B11-0.5	=(3.14*(A12/2)*(A12/2)*B12)/3
13	=B13*A12/B12	=B12-0.5	=(3.14*(A13/2)*(A13/2)*B13)/3
14	=B14*A13/B13	=B13-0.5	=(3.14*(A14/2)*(A14/2)*B14)/3
15	=B15*A14/B14	=B14-0.5	=(3.14*(A15/2)*(A15/2)*B15)/3
16	=B16*A15/B15	=B15-0.5	=(3.14*(A16/2)*(A16/2)*B16)/3
17	=B17*A16/B16	=B16-0.5	=(3.14*(A17/2)*(A17/2)*B17)/3
18	=B18*A17/B17	=B17-0.5	=(3.14*(A18/2)*(A18/2)*B18)/3
19	=B19*A18/B18	=B18-0.5	=(3.14*(A19/2)*(A19/2)*B19)/3
20	=B20*A19/B19	=B19-0.5	=(3.14*(A20/2)*(A20/2)*B20)/3
21	=B21*A20/B20	=B20-0.5	=(3.14*(A21/2)*(A21/2)*B21)/3
22	=B22*A21/B21	=B21-0.5	=(3.14*(A22/2)*(A22/2)*B22)/3
23	=B23*A22/B22	=B22-0.5	=(3.14*(A23/2)*(A23/2)*B23)/3
24	=B24*A23/B23	=B23-0.5	=(3.14*(A24/2)*(A24/2)*B24)/3
25	=B25*A24/B24	=B24-0.5	=(3.14*(A25/2)*(A25/2)*B25)/3
26	=B26*A25/B25	=B25-0.5	=(3.14*(A26/2)*(A26/2)*B26)/3
27	=B27*A26/B26	=B26-0.5	=(3.14*(A27/2)*(A27/2)*B27)/3
28	=B28*A27/B27	=B27-0.5	=(3.14*(A28/2)*(A28/2)*B28)/3
29	=B29*A28/B28	=B28-0.5	=(3.14*(A29/2)*(A29/2)*B29)/3
30	=B30*A29/B29	=B29-0.5	=(3.14*(A30/2)*(A30/2)*B30)/3

Figura 29.11

Lectura

Los poliedros arquimedianos

Figura 29.12

Su nombre se debe a Arquímedes, quien los describió por primera vez. Indicó el número de polígonos que concurren en cada vértice y el número de lados de estos polígonos. También se les llama semirregulares, ya que conservan la regularidad de sus caras y vértices, aunque no la igualdad, ya que están construidos con más de un tipo de polígonos. Un balón de futbol, hecho con hexágonos y pentágonos, es un polígono arquimediano.

Estos poliedros se obtienen al cortar de diferentes formas los poliedros regulares:

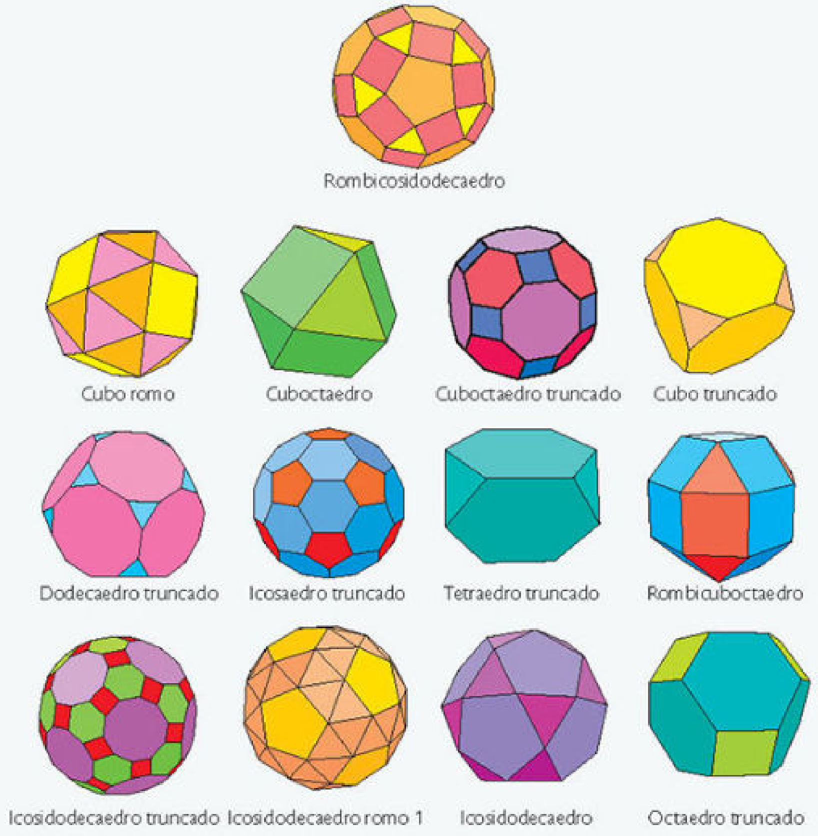


Figura 29.13

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a cortes en cilindros y conos, así como la relación con las figuras resultantes de los cortes y las nuevas medidas.

Lección 30 Volúmenes parecidos

Tema: Medida

Contenido: Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

Para recordar

En parejas.

1. Calculen el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

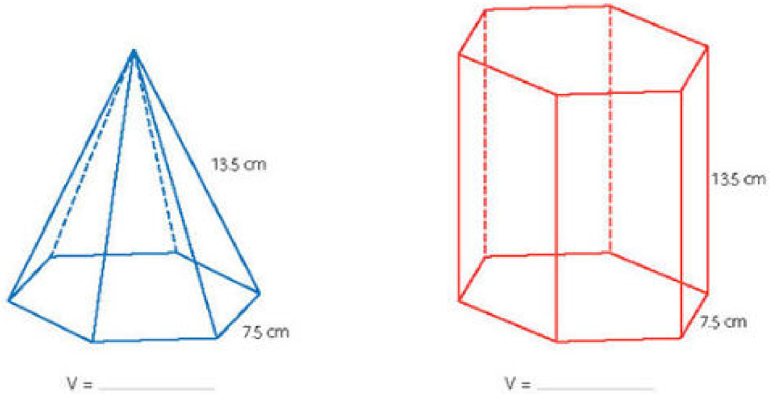


Figura 30.1

Comenten en el grupo las respuestas, observen la relación entre los volúmenes de los poliedros con la misma base y altura y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

Virginia y Carlos quieren hacer unos dulceros de cartón con forma de cilindro o cono. Las medidas propuestas para los dulceros son:

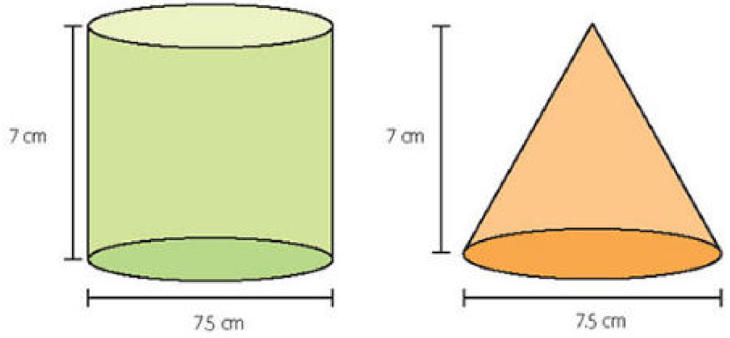


Figura 30.2

Virginia considera que al cono le cabe la mitad de dulces que al cilindro.
¿Tiene razón? ______________ ¿Por qué? ______________________________
____

Estimen cuántas veces cabe el contenido de un cono en un cilindro o cuántos conos se podrán llenar con el contenido de un cilindro.

¿Cómo pueden comparar las capacidades y determinar cuántas veces menos le cabe al cono comparado con el cilindro? ______________________________

Comenta con tus compañeros y profesor cómo llevar a cabo la investigación para responder las preguntas.

Pistas

En parejas.

- Para comparar los volúmenes, pueden elaborar plantillas para armar el cono y el cilindro con las dimensiones dadas.
- Después llenen los cuerpos geométricos con: aserrín, arroz, lentejas o arena.

Midan o pesen la cantidad que le cabe al cilindro y lo que le cabe al cono.
¿Cuánto le cabe al cono respecto del cilindro? ______________________

Compárenlos vertiendo el contenido del cilindro en el cono y observen cuántas veces se llena el cono.
¿Cuál es la relación del volumen del cilindro con respecto al cono? ______________
¿Coincide con la actividad de medir o pesar los contenidos del cilindro y el cono? ________
¿Por qué? ____
Viertan el contenido del cono en el cilindro y observen con cuántas veces se llena. ¿Cuál es la relación del volumen del cono con respecto al cilindro? ______________

Expresen brevemente cuál es la relación entre los volúmenes de un cono y un cilindro con la misma base y altura.
____
____
____

Expongan su trabajo en el grupo y escuchen las respuestas y opiniones de otros compañeros, pregunten en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

El volumen de un cuerpo se expresa como la medida del espacio que ocupa. En los cilindros y los conos, este volumen se determina en función de la superficie de la base y la altura.

Para calcular el volumen de un cilindro:

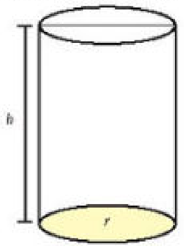


Figura 30.3

Volumen del cilindro = área de la base × altura

$$V = \pi r^2 \times h$$

Para calcular el volumen de un cono:

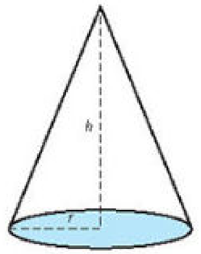


Figura 30.4

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$$

El volumen de un cono es igual a $\frac{1}{3}$ del volumen de un cilindro, cuando ambos tienen la misma base y altura.

El volumen de un cilindro es tres veces el volumen de un cono, cuando ambos tienen la misma base y altura.

Analicen en grupo las fórmulas para calcular el volumen de un cono o de un cilindro y la relación que hay entre ellas, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Virginia y Carlos han decidido hacer nuevos dulceros con formas de cilindro y de cono, pero quieren que tanto el cilindro como el cono tengan el mismo volumen para que ambos puedan contener la misma cantidad de dulces.

Si las medidas del cilindro son:

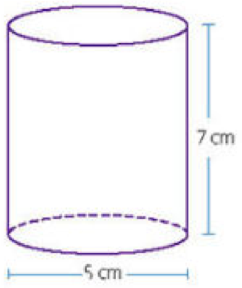


Figura 30.5

¿Cuáles deben ser las medidas del dulcero en forma de cono?

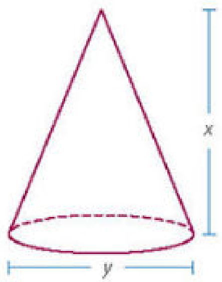


Figura 30.6

Si el dulcero tendrá la misma base que el cilindro, ¿cuáles serán sus dimensiones?
x = ____________ y = ____________

Si el dulcero tendrá la misma altura que el cilindro, ¿cuáles serán sus dimensiones?
x = ____________ y = ____________

Expongan su trabajo en el grupo y, en caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

En todos los problemas puedes usar calculadora para corroborar tus respuestas.

1. Yolotl quiere comprar una casa para su perro, que se llama Capuchino, y puede escoger entre estas tres que están en oferta:

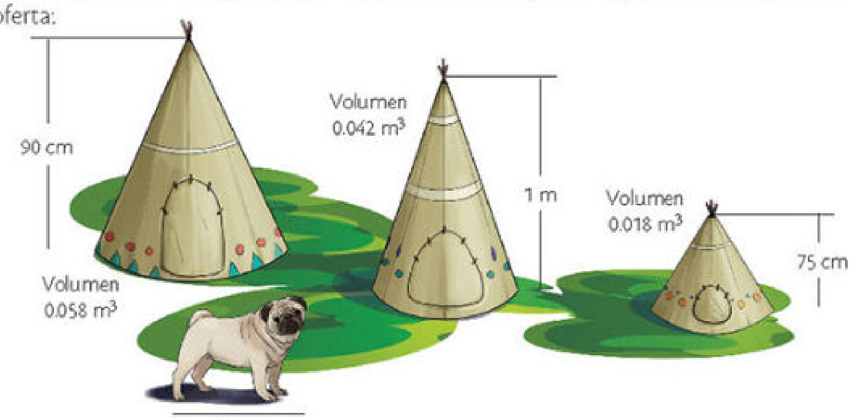


Figura 30.7

Si Yolotl quiere que Capuchino quepa a lo largo dentro de la casa, y que la casa ocupe el menor espacio posible. ¿Cuál casa debe comprar? ____________ ¿Por qué? ____________

2. Estima el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

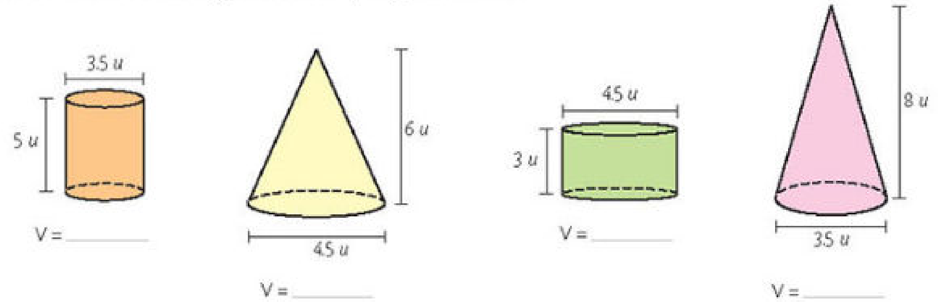


Figura 30.8

¿Cuál tiene mayor volumen? ____________ ¿Por qué? ____________

Después corrobora tu respuesta calculando el volumen de cada uno.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

3. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

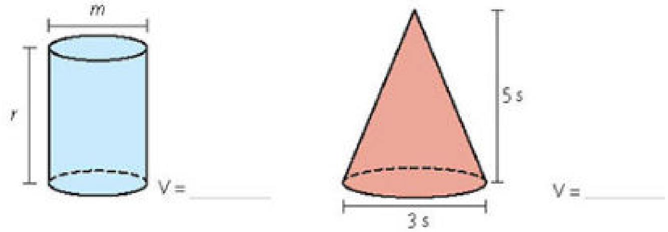


Figura 30.9

4. Antiguamente se empleaban en el comercio al menudeo vasijas con medidas de capacidad en forma cilíndrica, hechas de estaño. ¿Qué dimensiones debía tener la de un litro?

Recuerda que un litro es igual a 1 000 cm³.

Diámetro: ____________
Altura: ____________
Volumen: ____________

¿Quedó exacto tu cálculo? ____________ ¿Por qué? ____________

Compara tu respuesta con la de tus compañeros y vean cuáles medidas quedaron más aproximadas a los requerimientos del problema.

Comenta tus respuestas en el grupo y, en caso necesario, resuelvan algunos de los ejercicios en el pizarrón.

Aplica las TIC

En parejas, construyan una hoja electrónica para calcular el volumen de conos.

Virginia y Carlos siguen haciendo sus dulceros, pero ahora quieren diseñar uno en forma de cono, cuyo volumen no sea mayor de 125 cm³ ni menor de 80 cm³. Si la altura del cono es de 7.5 cm, ¿entre qué valores puede estar el diámetro de la base del dulcero en forma de cono?

Elaboren una hoja electrónica de cálculo, como la de la figura 30.10, para ayudarse a resolver este problema.

Para obtener valores más cercanos a los que se piden en el problema, aumenten el número de decimales en el radio de la base, en el intervalo en que se encuentre la respuesta que necesitan.

Si requieren ayuda, solicítenla a su profesor.

	A	B	C	D	E	F
1	Volumen del cono					
2	Altura	Radio de la base	Volumen			
3	7.5	1	7.854			
4	7.5	1.5	17.6715			
5	7.5	2	31.416			
6	7.5	2.5	49.0875			
7	7.5	3	70.686			
8	7.5	3.5	96.2115			
9	7.5	4	125.664			
10	7.5	4.5	159.0435			
11	7.5	5	196.35			
12	7.5	5.5	237.5836			
13	7.5	6	282.744			
14	7.5	6.5	331.8316			
15	7.5	7	384.846			
16	7.5	7.5	441.7875			
17	7.5	8	502.[illegible]			
18	7.5	8.5	567.[illegible]			

=(3.141592*B3*B3*A3)/3

Figura 30.10

Aplica las TIC (*continuación*)

Elaboren una tabla parecida para encontrar el radio de un cilindro con las mismas condiciones, es decir, que el volumen no sea mayor a 125 cm^3 ni menor a 80 cm^3.

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

Inconmensurable

Uno de los grandes enigmas de la humanidad ha sido la historia del número π.

Uno de los textos matemáticos más antiguos, el Papiro de Rhind (aproximadamente del año 1 700 a.n.e.) nos muestra al escriba Ahmés cotejando la evaluación del área de un círculo inscrito en un cuadrado (figura 30.11).

No fue sino en la Grecia Antigua cuando la relación entre el diámetro y el perímetro de una circunferencia comenzó a considerarse como uno de los grandes retos a resolver. Antiphon, un contemporáneo de Sócrates, inscribió un cuadrado en el círculo y luego un octágono.

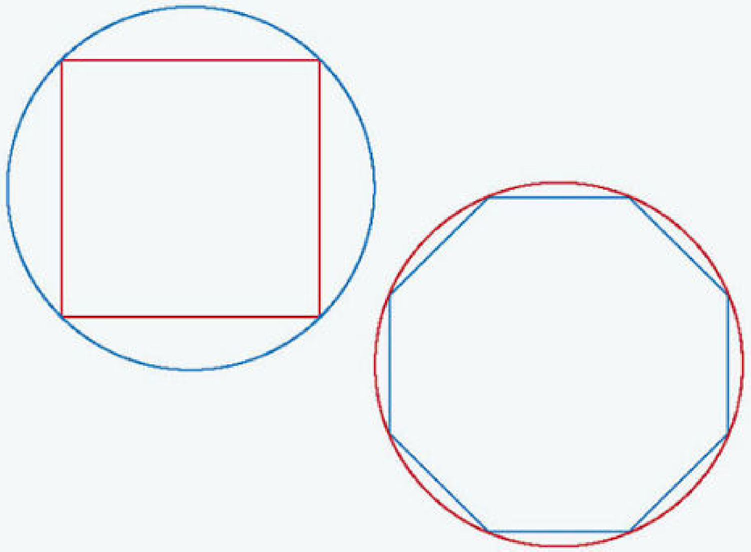


Figura 30.11

Imagina duplicar el número de lados hasta el momento en que el polígono resultante coincida prácticamente con el círculo, como se muestra en la figura 30.12.

Después de los trabajos de Hipócrates y Euxodo, Euclides mencionó el método de exhaución en su obra titulada *Elementos*. Este método consistente en duplicar, al igual que Antiphon, el número de lados de los polígonos regulares inscritos y circunscritos y en mostrar dónde se unen los diversos elementos del procedimiento.

Arquímedes reunió y desarrolló varios resultados. Demostró que el área de un círculo es un medio del producto de su radio por su circunferencia y que la relación de la circunferencia al diámetro está comprendida entre:

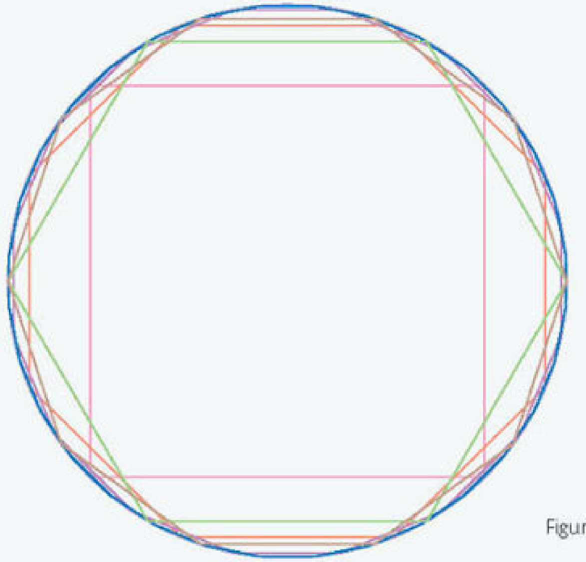


Figura 30.12

$$\frac{223}{71} = 3.14084 \quad \text{y} \quad \frac{22}{7} = 3.14285$$

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto al cálculo del volumen en cilindros y conos, y la relación entre sus volúmenes.

Lección 31

Volumen estimado

Tema: Medida

Contenido: Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Para recordar

En parejas:

1. Estimen qué longitud es mayor. Después verifiquen su respuesta:

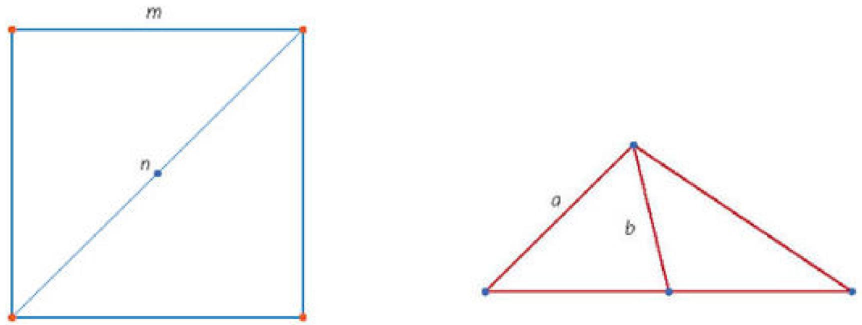


Figura 31.1

¿El lado m del cuadrado o la diagonal n? ______

¿El lado a del triángulo o la mediana b? ______

2. Calculen el dato que se solicita. Tomen $\pi = 3.14$.

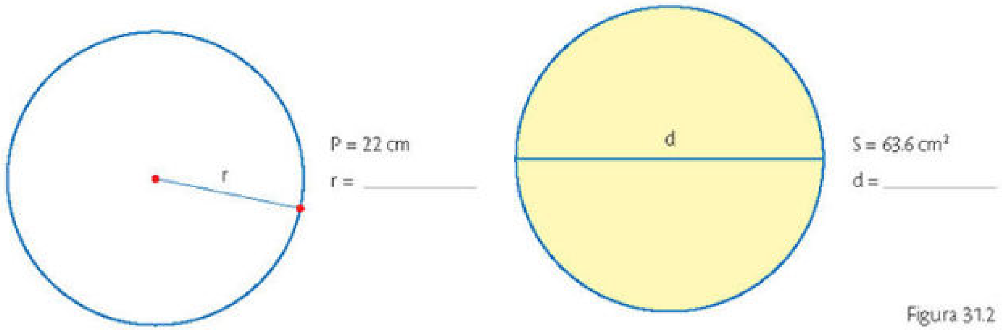


Figura 31.2

En grupo, comenten sus estrategias y respuestas, y den alguna justificación de sus estimaciones, en caso de dudas, consulten con su profesor.

RETO

En parejas, resuelvan el siguiente reto.

En la agencia de publicidad Yolotl se fabricarán pisapapeles de promoción para anunciar otras empresas y sus productos. Los harán de bronce con forma de cono o de cilindro, quieren encontrar las dimensiones más adecuadas.

Su objetivo es que tanto los conos como los cilindros tengan aproximadamente un volumen de 100 cm^3, y que una de las dimensiones (la superficie de la base o la altura del cuerpo geométrico) sea la misma. Estimen:

¿Cuáles serán las dimensiones del cono? ______

¿Y cuáles las del cilindro? ______

¿Qué es mejor, que tengan la superficie de la base o la altura iguales? ______

¿Por qué? ______

Comenten con sus compañeros y profesor cómo llevar a cabo la investigación para responder a las preguntas.

Pistas

En parejas.

Este problema puede tener muchas soluciones, por eso es importante que convengan con sus compañeros cuáles podrían ser las dimensiones de los pisapapeles, antes de hacer cualquier cálculo.

En la lección anterior aprendieron que el volumen de un cono con la misma base y altura de un cilindro es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro.

Discutan los criterios que pueden considerar, por ejemplo, que no tuvieran una altura mayor de 10 cm, o que el cilindro tuviera la misma medida de la base que de altura.

Analicen cuáles podrían ser las dimensiones de cualquiera de los dos a fin de tener un volumen aproximado de 100 cm^3.

Completen la tabla 31.1 y analicen la información. Consideren el valor de π como 3.14.

Cilindro		
Diámetro en cm	Altura en cm	Volumen en cm3
1	1	0.785
	2	6.28
3		21.195
4	4	
5	5	
	6	169.56
7		269.255
	8	401.92
	9	
10	10	

Tabla 31.1

Pistas (*continuación*)

¿En qué caso el cilindro tiene un volumen aproximado de 100 cm^3? ______

Si se desea que un cono tenga la misma altura que el cilindro, que tiene aproximadamente 100 cm^3, pero 2 cm más del diámetro de la base, ¿de cuánto debe ser su volumen? ______

Discutan con sus compañeros qué otras consideraciones podrían hacer, por ejemplo, que el cono tenga la misma base y 2 cm más en la altura.

Determinen las dimensiones del cilindro y del cono que cumplan con las condiciones del problema y, expliquen brevemente por qué.

Cilindro: ______

Cono: ______

Porque: ______

Expongan su trabajo en el grupo y escuchen las respuestas y opiniones de otros compañeros y equipos y, pregunten en caso de que tengan alguna duda.

Formalización

El volumen de un cono es igual a $\frac{1}{3}$ del volumen de un cilindro si ambos tienen la misma base y altura.

En algunos problemas sobre cilindros hay que calcular alguna de las variables que integran la fórmula para el cálculo de su volumen.

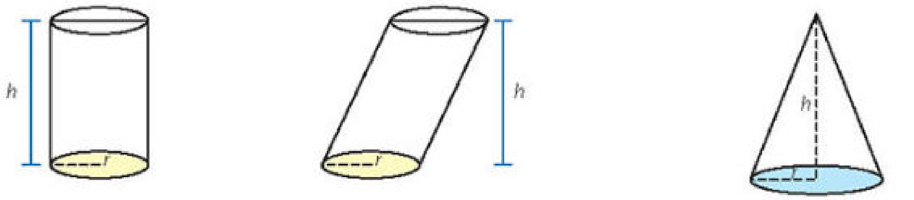


Figura 31.3

Volumen del cilindro = área de la base × altura

$V = \pi r^2 \times h$

Volumen del cono = $\frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3}$

$V = \frac{r^2\ h}{3}$

A partir de las fórmulas para obtener el volumen del cilindro y del cono, obtengan las fórmulas para calcular la altura del cilindro, así como su radio.

h = ______

r = ______

Hagan lo mismo para el cono.

h = ______

r = ______

Apliquen las fórmulas que obtuvieron para resolver el siguiente problema:

¿Cuánto debe medir el radio de un cilindro para que su volumen sea de 500 cm^3 y su altura de 10 cm? ______

¿Cuánto debe medir de altura un cono para que el radio de su base sea de 2 cm y su volumen de 70 cm^3? ______

Cono	Cilindro
$V = \pi r^2 \times h$	$V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$
$h = \frac{V}{\pi r^2}$	$h = \frac{3V}{\pi r^2}$
$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$	$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$

Analicen en grupo los despejes de las variables de las fórmulas para el cálculo del volumen en cilindros o conos y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

UN NUEVO RETO

Reúnanse en parejas.

Un silo es un almacén para granos. Algunos tienen forma de cono (figura 31.4).

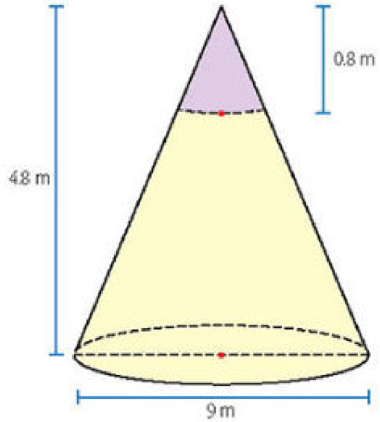


Figura 31.4

¿De cuánto es su volumen? ______

La parte superior del silo debe quedar vacío, para una ventilación adecuada y tiene forma de cono con una altura de 0.8 m de altura.

¿Cuánto mide de diámetro el cono que debe quedar vacío? ______

¿De cuánto es el volumen del cono que debe quedar vacío? ______

¿De cuánto es el volumen útil o utilizable del silo? ______

Comparen sus resultados con los de otros equipos.

Expongan su trabajo en el grupo y, en caso de que tengan alguna omisión, completen lo que les falte.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

En equipos, resuelvan los problemas sin usar lápiz y papel, después verifíquenlos usando calculadora.

1. Para una fiesta, René prepara dos garrafones con ocho litros de agua, uno de tamarindo y otro de jamaica.
   - Para el agua de tamarindo pone vasos cónicos de 8 cm de diámetro por 10 cm de altura.
   - ¿Cuántos vasos podrían llenarse? ______
   - Para el agua de jamaica pone vasos cilíndricos con las mismas dimensiones que los cónicos.
   - ¿Cuántos vasos podrían llenarse? ______

2. El tío Rafa quiere almacenar su cosecha de maíz de 180 m³ en un silo, si el diámetro mide 12 m, ¿cuánto deberá medir la altura del silo, para que la cosecha quepa? Elijan la medida que consideren correcta. Justifiquen su respuesta.
   - Entre uno y tres metros.
   - Entre tres y cuatro metros.
   - Entre cuatro y cinco metros.
   - Entre cinco y seis metros.
   - Porque: ______

3. Una fábrica de aluminio desea cuadruplicar la capacidad de una lata cilíndrica. ¿Cuál de las siguientes variaciones debe efectuarse sobre la lata? Justifiquen su respuesta.
   - Duplicar sólo el radio de la base.
   - Duplicar sólo la altura de la lata.
   - Cuadruplicar sólo el radio de la base.
   - Duplicar el radio de la base y la altura de la lata.
   - Porque: ______

4. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la estimación más acertada de la capacidad del estanque cilíndrico del dibujo? Justifiquen su respuesta.
   - Un poco más de 3 m³.
   - Un poco más de 6 m³.
   - Un poco menos de 9 m³.
   - Un poco más de 9 m³.
   - Porque: ______

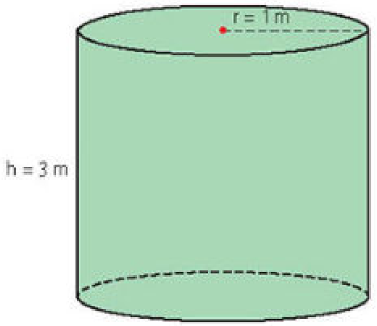


Figura 31.5

5. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de un cono que tenga el mismo volumen que el estanque cilíndrico anterior? ______ ¿Por qué? ______

Comenten sus respuestas con sus compañeros y, en caso necesario, resuelvan algunos de los ejercicios en el pizarrón.

Aplica las TIC

Observa la fórmula del volumen del cilindro:

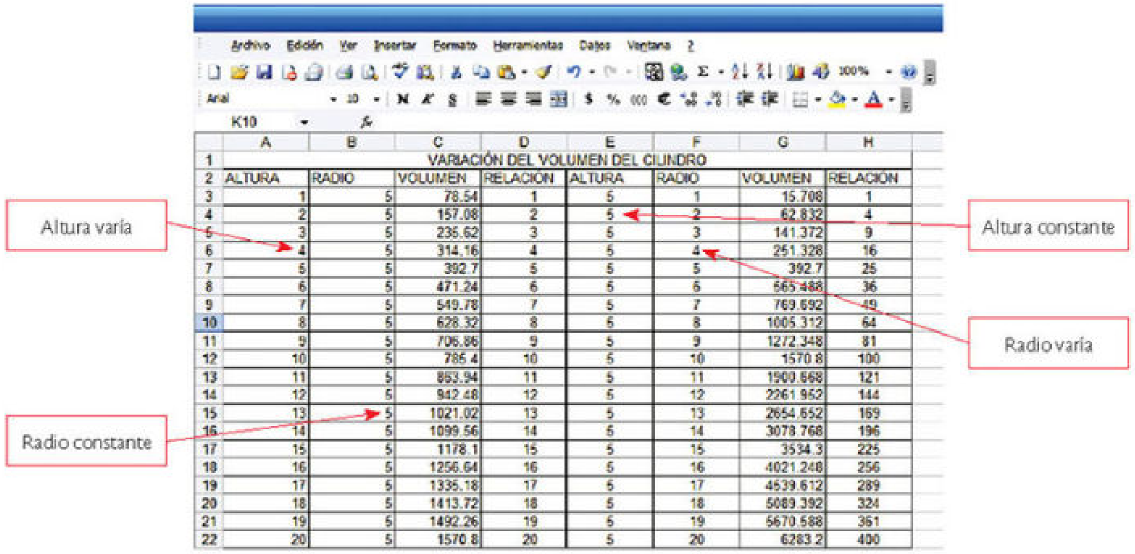
$$V = \pi r^2 h$$

Escribe ahora lo que representa cada literal en la fórmula. Explica si es una variable dependiente o independiente o si es una constante:

V ______
π ______
r ______
h ______

Esta fórmula representa la relación que hay entre el volumen de un cilindro y el valor del radio de su base y su altura. Hay dos variables independientes y una dependiente.

En la hoja electrónica de cálculo (figura 31.6) se mantendrá constante el valor del radio, para analizar lo que sucede con el volumen, cuando varíe el valor de la altura. Después, la altura permanecerá constante para analizar cómo varía el volumen del cilindro, cuando cambie el valor del radio de la base.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	VARIACIÓN DEL VOLUMEN DEL CILINDRO							
2	ALTURA	RADIO	VOLUMEN	RELACIÓN	ALTURA	RADIO	VOLUMEN	RELACIÓN
3	1	5	78.54	1	5	1	15.708	1
4	2	5	157.08	2	5	2	62.832	4
5	3	5	235.62	3	5	3	141.372	9
6	4	5	314.16	4	5	4	251.328	16
7	5	5	392.7	5	5	5	392.7	25
8	6	5	471.24	6	5	6	565.488	36
9	7	5	549.78	7	5	7	769.692	49
10	8	5	628.32	8	5	8	1005.312	64
11	9	5	706.86	9	5	9	1272.348	81
12	10	5	785.4	10	5	10	1570.8	100
13	11	5	863.94	11	5	11	1900.668	121
14	12	5	942.48	12	5	12	2261.952	144
15	13	5	1021.02	13	5	13	2654.652	169
16	14	5	1099.56	14	5	14	3078.768	196
17	15	5	1178.1	15	5	15	3534.3	225
18	16	5	1256.64	16	5	16	4021.248	256
19	17	5	1335.18	17	5	17	4539.612	289
20	18	5	1413.72	18	5	18	5089.392	324
21	19	5	1492.26	19	5	19	5670.588	361
22	20	5	1570.8	20	5	20	6283.2	400

Figura 31.6

Cuando se mantiene el radio constante y se duplica la altura, ¿el volumen del cilindro se duplica? ______

¿Por qué? ______
¿Qué pasa cuando se triplica la altura? ______
¿Y cuándo se cuadruplica? ______
¿Cómo varían la altura y el volumen del cilindro cuando el radio permanece constante? ______
¿Cómo varían el radio y el volumen del cilindro cuando la altura permanece constante? ______

Aplica las TIC (*continuación*)

Hagan una tabla similar para el cono y observen cómo varía el volumen cuando se mantiene la altura constante y cuando se mantiene el radio constante.

Escriban en su cuaderno sus conclusiones de la investigación y compártanlas con otros equipos.

Lectura

Todo depende de la forma

A lo largo de la historia, conos y cilindros han proporcionado a las civilizaciones la solución para uno de sus problemas fundamentales: ¿dónde almacenar los granos de sus cosechas?

Por ejemplo, buena parte de la riqueza del antiguo Egipto provenía de los excedentes agrícolas propios y de los que se obtenían por la vía de los impuestos que cobraban en especie; es decir, recibían granos como si fuera una moneda. Se hacía, pues, necesario contar con estructuras capaces de proteger esas riquezas contra el viento y las crecidas del río Nilo. Durante esa época, los silos se construyeron en forma de cono. En la punta había una abertura por donde se podían introducir los granos; la ventaja de esta morfología era su estabilidad.

Figura 31.7 Silos cónicos.

Muchos siglos después, a finales del XIX, Franklin Hiram King (1848–1911), un científico agrícola, nacido en una granja de Wisconsin, dedicó su vida al estudio de los suelos y la forma de aprovecharlos y hacerlos más fértiles (en Estados Unidos de América se le considera el padre de la física de suelos).

Como resultado de su interés por esta rama del conocimiento, diseñó el silo cilíndrico que hasta ahora, con algunas modificaciones, se usa. Uno de los problemas que los silos con esta forma resolvieron fue el de evitar que se formara moho, pues como los cilindros no tienen esquinas, no ofrecen recovecos donde esta plaga de los granos pueda generarse y mantenerse.

Figura 31.8 Silos cilíndricos.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la estimación del volumen en cilindros y conos.

Lección 32

Más oxígeno nos vendría bien

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Para recordar

Seis metros de una tela tienen un costo de \$480. Escribe una expresión algebraica que represente el costo de esta tela.

Determina cuánto costarán 12 metros. ____

¿Cuántos metros se podrían comprar con \$4 400? ____

Comparen sus procedimientos y comenten con su profesor.

RETO

En un parque se van a plantar árboles, de manera que el número de árboles por fila exceda en tres al número de filas.

Determina el número total de árboles que se necesitarían en función del número de filas. ____

Con base en la expresión algebraica, elabora una gráfica en tu cuaderno.

Para un terreno con 10 filas de árboles, ¿cuántos árboles se tendrán que plantar? ____

Si hay 240 árboles disponibles, ¿de cuántas filas podrá ser el arreglo de los árboles en el terreno y cuántos árboles habrá por fila? ____

Comparte tus resultados y procedimientos con tu profesor y tus compañeros.

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden guiar en la resolución del reto anterior:

- Si hay una sola fila, ¿cuántos árboles habrá?
- ¿Y si hay dos filas? ¿O tres? ¿Puedes identificar la expresión por medio de la cual relacionar las dos variables de este problema?
- Teniendo la expresión algebraica, ¿cómo puedes trazar la gráfica que represente la relación entre las variables?

Formalización

En equipos, contesten las cuestiones planteadas en esta sección.

En varias de las lecciones de este libro de tercer grado, así como en los libros de primero y segundo de esta serie, se han estudiado situaciones en las que hay relaciones entre dos variables; entre las que se han identificado las siguientes:

- Relaciones de variación lineal. ¿Cómo son las expresiones algebraicas y las gráficas de las relaciones lineales? Explica. ____
- Relaciones de variación cuadrática. ¿Qué caracteriza a las expresiones algebraicas y las gráficas de las relaciones cuadráticas? Explica. ____

Entre las primeras, has podido reconocer algunas con determinadas características: las relaciones de proporcionalidad directa y las relaciones de variación lineal en general. ¿Qué es lo que distingue unas de otras? Completa la tabla 32.1:

	Modelo o expresión algebraica	Características de su gráfica
Relaciones de proporcionalidad directa		
Relaciones de variación lineal en general		

Tabla 32.1

¿De qué tipo son las relaciones entre variables, presentadas en las secciones previas de Para recordar y Reto? Explica tu respuesta. ____

Escriban en su cuaderno un ejemplo de una relación de variación lineal y otro de variación cuadrática; preséntenlo a otro de los equipos.

Discutan en el grupo por qué es útil estudiar y reconocer las relaciones entre variables. ____

GLOSARIO

Relación lineal. Se dice que existe una variación lineal si puede representarse por medio de una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$ (x, y representan a las variables, y a, b son números o valores específicos de cada situación). La gráfica que representa una relación de este tipo es una línea recta.

Relación de variación cuadrática. Se dice que existe variación cuadrática si puede representarse por medio de una expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + bx + c$ (x, y representan a las variables, y a, b, c son números o valores específicos de cada situación). La gráfica que representa una relación de este tipo es una línea curva.

Relación de proporcionalidad directa. Se identifican por tener expresiones tipo $y = ax$, es decir, que $b = 0$ en el modelo de variación lineal. Además, la gráfica de este tipo de relaciones es una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas, mientras que esto no sucede en las relaciones de variación lineal en general.

UN NUEVO RETO

Lety llega a su casa en Cuernavaca y se encuentra con que hay 2 400 litros de agua en su piscina. Para limpiarla antes de que lleguen sus invitados, primero tiene que vaciarla.

Por la llave de desagüe de la piscina salen 30 litros de agua por minuto. Elabora la gráfica que relaciona la cantidad de agua en la piscina (en litros), con el tiempo que tarda en salir (en minutos).

¿Cuántos litros salen en $\frac{1}{4}$ de hora? ____

¿Cuánto tarda en vaciarse la piscina? ____

Escribe la expresión algebraica que representa la relación entre estas dos variables. Explica cómo la obtuviste. __________

Después de limpiar la piscina, hay que volverla a llenar. Por cada una de las dos llaves de llenado entran 20 litros de agua por minuto, por cada una de ellas. Elabora la gráfica que represente esta nueva situación. ¿Cuánto tardará en llenarse, si la piscina mide 2.5 m de ancho, por 3 m de largo, y 1.6 m de profundidad?

Compara las dos gráficas (la de desagüe y la de llenado de la piscina). ¿Cómo son sus pendientes? ¿En qué puntos intersecan el eje vertical? __________

Encuentra la expresión algebraica para el llenado de la piscina. Compara las dos expresiones. ¿Qué diferencias observas? __________

¿Qué características de las expresiones algebraicas se relacionan con sus respectivas gráficas? Explica.

Comenten con su profesor sus resultados, procedimientos y observaciones.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

En los ejercicios siguientes, cuando se trate de relaciones de variación lineal, identifica las que sean de proporcionalidad directa, argumentando tu respuesta.

Al terminar cada ejercicio, comparen resultados y procedimientos y comenten con su profesor.

A. Esteban va a la escuela primaria. Todos los días se lleva para su refrigerio un sándwich de crema de cacahuate con pan multigrano. La cantidad E de calorías en el sándwich depende de los gramos c de crema de cacahuate con que lo elabore. De acuerdo con la siguiente expresión:

$$E = 170 + 6c$$

Si en lugar de usar pan multigrano, Esteban utiliza dos rebanadas de pan blanco, las cuales contienen 75 calorías cada una, ¿cuál sería la expresión para el total de calorías del sándwich?

La mamá de Esteban se preocupa por el peso de su hijo, y quiere convencerlo de ponerle a su sándwich únicamente queso panela, que aporta tres calorías por gramo. Escribe las expresiones para las calorías de este refrigerio, con las dos opciones de pan.

Traza, en un mismo sistema de coordenadas, las gráficas de las diferentes combinaciones. Compara gráficas y expresiones algebraicas, y explica las diferencias entre ellas.

B. En una planta procesadora de alimentos disponen de dos tipos de mermelada del mismo sabor: una con 20% de contenido de azúcar y otra con 50%.

Si desean producir mermelada con el 30% de azúcar, encuentra la expresión algebraica para la relación entre el total de kilogramos de mermelada de 30% y los kilogramos que se necesitan de la mermelada de 20% para producirla.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (*continuación*)

¿Qué tipo de relación es? Traza su gráfica. Si se desea producir 900 kg de mermelada al 30% de azúcar, ¿cuánta se necesitará de la de 20%? ¿Y cuántos kg de la de 50%?

C. Identifica la gráfica en la figura 32.1 que corresponde a cada una de las expresiones algebraicas que están en la tabla 32.2:

Expresión algebraica	Gráfica número
$y = 5x$	
$y = -2x^2 - 4x + 5$	
$y = 3x - 8$	
$y = 3x^2$	

Tabla 32.2

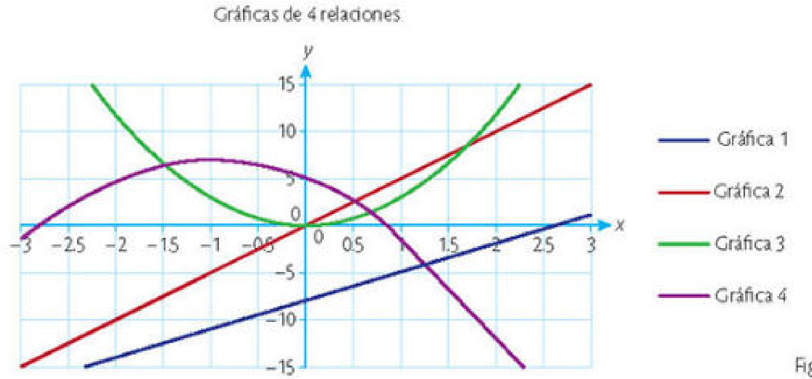


Figura 32.1

Aplica las TIC

Lleven a cabo la siguiente actividad por equipos. Para operaciones y resultados parciales, usen sus cuadernos. Al terminar comparen y comenten con su profesor.

Guadalupe y Araceli van a poner un centro de fotocopiado. Les ofrecen una fotocopiadora en renta, con un alquiler de $2 000 mensuales y $0.10 por cada copia.

Están considerando cobrar a sus clientes 50 centavos por cada copia. Desean conocer cuánto tendrían de ingresos y cuáles serían sus costos (sólo por la operación de la máquina copiadora) para diferentes cantidades de fotocopias por mes.

Para ayudar a Araceli y Guadalupe, es recomendable efectuar los siguientes pasos:

- Calcular tanto los ingresos como los costos para varios niveles de fotocopiado, durante un mes; organizar los datos en tablas.

Aplica las TIC (*continuación*)

- Identificar las expresiones algebraicas, tanto para ingresos como para costos.
- Utilizando las expresiones anteriores, usar una hoja electrónica de cálculo para generar diferentes valores de las variables del problema.
- A partir de los valores que se hayan obtenido en una tabla, generar las gráficas de ingresos y costos; puedes seguir instrucciones similares a las utilizadas en la lección 18 de este libro.

Con ayuda de las tablas y gráficas en la hoja electrónica de cálculo, contesta lo siguiente:

- ¿Cuáles serían los ingresos y los costos para los siguientes volúmenes de fotocopiado de un mes: 2 000, 4 000, 6 000, 8 000?, ¿pierden o ganan dinero en cada caso?
- ¿Cuál es el mínimo de fotocopias que necesitan sacar para no tener pérdidas por la fotocopiadora?
- ¿De qué tipo de relación entre variables se trata en cada caso (de los costos y de los ingresos)? Señala por qué.
- Discutan qué tan conveniente consideran que es para Guadalupe y Araceli rentar la fotocopiadora que les ofrecen.

Lectura

Variables y actividades humanas

Tanto en las actividades humanas como en la naturaleza, es frecuente encontrar cantidades que están relacionadas unas con otras, donde los valores que tome una de ellas dependen de los valores que tomen una o más variables.

Ejemplos de lo anterior son las situaciones que hemos visto en esta lección y otras similares, como las que se enuncian a continuación:

- La distancia o el tiempo que puedes conducir un auto (barco, avión, etcétera) depende de la cantidad de combustible de que se disponga.
- La cantidad de un bien o servicio que demanden los consumidores está en función de su precio de venta principalmente.
- La población de algunos animales en una zona determinada se relaciona con la cantidad de alimento y agua disponible en el área.

Al estudiar las relaciones entre variables, es importante precisar cuál es la forma de esa dependencia (si es cuadrática o de otra naturaleza) y cuáles son los valores de las constantes. Para ello, se recurre tanto a tablas de datos y expresiones algébricas como a gráficas. De esta manera, se puede tener una idea de cuál será el comportamiento futuro del fenómeno o situación de que se trate.

¿Consideras que el número de escuelas y hospitales que se requieren en una ciudad o un país, podría estar relacionado con el número de personas que habiten en esa zona?

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto a la variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. Comenten en grupo su resumen.

Lección 33

Busca la equidad

Tema: Nociones de probabilidad

Contenido: Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Para recordar

Juegan dos personas, el que juega primero, elige una de las dos cajas (figura 33.1) y saca una bola, sin ver; después, la segunda persona saca una bola. Gana el que saque primero una bola verde, ¿cómo te conviene jugar? ______

Discute con tus compañeros y comenten con su profesor.

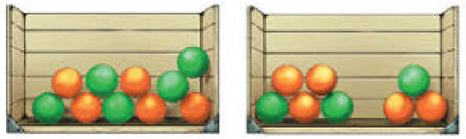


Figura 33.1

RETO

Samuel y Alejandra van a jugar disparejo con dos monedas. En este juego se arrojan al aire dos monedas. Alejandra gana si en las monedas caen caras iguales o parejas (dos águilas o dos soles); Samuel ganará cuando las monedas salgan diferentes o disparejas (un sol y un águila o viceversa).

Cada vez que arrojan las monedas, el ganador obtiene una ficha. Al iniciar el juego hay 20 fichas.

- ¿Quién acabará con más fichas, Samuel o Alejandra? ______

A continuación, deciden jugar el mismo juego, pero esta vez con tres monedas. Aquí también Alejandra gana si salen parejas y Samuel con disparejas.

- Esta vez, ¿quién crees que tendrá más fichas? ______
- ¿Los juegos te parecen similares o diferentes? ______

En el grupo practiquen los dos juegos entre parejas. Lleven un registro en su cuaderno de cómo caen las monedas en cada tiro y analicen los resultados obtenidos en cada uno de los juegos.

- Con esos datos, ¿qué pueden decir sobre la posibilidad que tienen para ganar uno u otro juego? ______
- ¿Los dos juegos son justos para los dos jugadores o hay alguno que tenga ventaja sobre el otro? ______

Compara tus procedimientos y respuestas con tus compañeros, y coméntenlos entre ustedes y su profesor.

Pistas

Las siguientes sugerencias te pueden ser útiles para resolver el reto.

- ¿Cuáles son los resultados posibles en cada uno de los experimentos aleatorios?
- ¿Qué procedimientos conoces para determinar la probabilidad de cada uno de los resultados posibles?
- ¿Cómo puedes agrupar los resultados posibles para formar diferentes eventos?
- ¿De qué depende la ganancia o pérdida de cada jugador?

Formalización

En los juegos de azar es importante comparar las probabilidades de los eventos relacionados con las apuestas o reglas de juego para cada uno de los jugadores.

Por ejemplo, en los juegos entre Samuel y Alejandra, en la sección Reto ¿qué observaste?

- ¿Siempre los jugadores ganan aproximadamente lo mismo, o a veces uno gana más que otro?
- Explica. ______

A partir de las probabilidades de todos los resultados posibles de una experiencia aleatoria, se pueden formar diferentes eventos; un evento es: ______

Da un ejemplo de un experimento aleatorio y un evento posible en ese experimento: ______

La probabilidad de un evento se puede obtener por medio de alguno de los procedimientos que estudiaste en las lecciones 6, 13 y 20.

Los valores de probabilidad de los eventos se pueden comparar directamente o por medio de gráficas. Por ejemplo:

Al tirar un dado, los resultados posibles son: ______

Y la probabilidad de que ocurra cualquiera de estos resultados es de: ______

Cuando la probabilidad de dos eventos es igual, es decir, que tienen las mismas posibilidades de ocurrir, decimos que los eventos son equiprobables.

Si por lo contrario, dos eventos tienen diferente probabilidad de ocurrir, es decir, es más posible que ocurra uno que el otro, los eventos se llaman no equiprobables.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, ¿los eventos A y B siguientes son equiprobables o no?

A = {caiga número par}
B = {caiga número impar}

Explica tu respuesta. ______

Comparen y comenten sus observaciones con su profesor.

GLOSARIO

Eventos equiprobables. Dos o más eventos son equiprobables si tienen la misma probabilidad de ocurrir. Si dos o más eventos tienen diferentes probabilidades de ocurrir, se llaman **no equiprobables**.

UN NUEVO RETO

En las secciones anteriores hemos analizado el tiro de dos monedas desde el punto de vista de la equiprobabilidad de diferentes eventos. Ahora aplica esta nueva herramienta a la siguiente situación. En una feria, uno de los juegos consiste en tirar dados a ruedas que giran a gran velocidad. Las diferentes ruedas con las que se puede jugar son las siguientes:

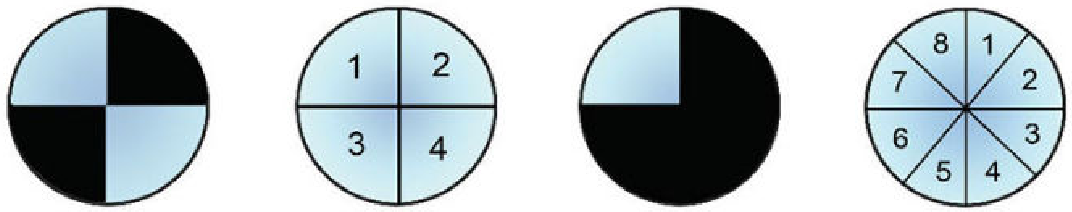


Figura 33.2

Cuáles son los posibles resultados en cada una de ellas?

Rueda	Resultados posibles
1	
2	
3	
4	

Tabla 33.1

¿En cuáles de ellas los posibles resultados tienen la misma probabilidad de salir y en cuáles no? Explica. ______

Determina si los siguientes son juegos justos o no; explica tu respuesta en cada caso:

- Rueda 1: ganas una ficha si clavas el dardo en el color azul. ______
- Rueda 2: ganas una ficha si le das al número cuatro (pierdes tu ficha si le pegas al uno, dos o tres). ______
- Rueda 3: ganas una ficha si el dardo cae en el color azul. ______
- Rueda 4: ganas una ficha si tu dardo cae en número par (pierdes si cae en número impar). ______

En los casos en que el juego no sea justo, ¿cómo modificarías las reglas del juego para lograr que sea justo? ______

Comparen y comenten sus resultados, procedimientos y observaciones con su profesor.

¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno)

A. En la situación de la sección Para recordar, ¿qué cambios harías en las reglas, para que fuera un juego justo para ambos participantes? Comparen las propuestas en el grupo.

GLOSARIO

Juego justo. Si los resultados o eventos de cada jugador son equiprobables, o si al repetir un juego muchas veces, cada uno de los jugadores tiende a ganar aproximadamente el mismo número de veces, entonces estamos hablando de un juego justo.

B. En la figura siguiente se muestran dos vistas del mismo dado, de manera que se ven sus seis caras.

- ¿Cuáles son los posibles resultados de tirar el dado? ¿Cuáles son las probabilidades de ganar con cada color?
- ¿Todos los colores son o no equiprobables? Dibuja la gráfica con las probabilidades de los diferentes colores.
- ¿De qué otra manera podrías pintar las caras del dado para que al lanzarlo los resultados sean justos?

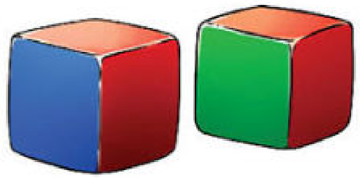


Figura 33.3

C. De los alumnos del grupo, 12 prefieren jugar futbol,15 basquetbol y ocho la natación. Si se selecciona al azar un alumno del grupo:

- ¿Qué deporte es más probable que prefiera? ¿Es equiprobable el encontrarse con un alumno que practique un deporte u otro?
- Traza en una gráfica las probabilidades de seleccionar un alumno que prefiera cada uno de los deportes mencionados.

D. En una baraja inglesa de 52 cartas (figura 33.4), al sacar una carta al azar, hay dos juegos a los que se puede apostar:

- Juego 1: sacar un rey (K) o sacar un cuatro.
- Juego 2: obtener un ocho o sacar un trébol

¿Quién ganaría más en cada juego, o ganarían igual los que apuesten a uno u otro resultado? ¿Consideras que son juegos justos o no? Explica tu respuesta.

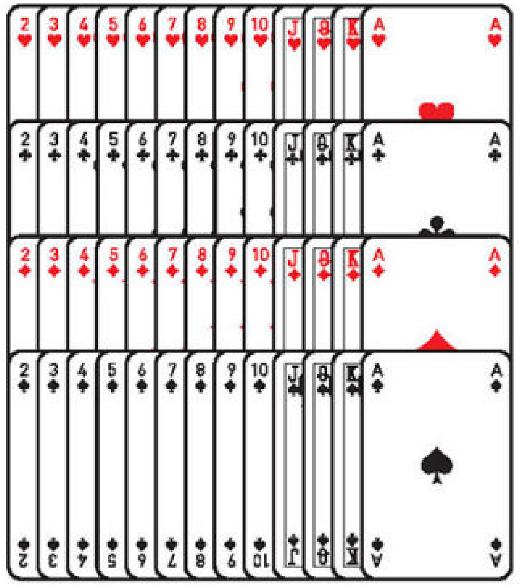


Figura 33.4

Aplica las TIC

Por equipos, diseñen dos juegos en los que se lancen dos dados simultáneamente. Uno de los juegos deberá ser justo, el otro no.

Elaboren en sus cuadernos las gráficas de probabilidad de cada juego.

Utiliza dados electrónicos (como los que ya usaron en primero y segundo grados) para simular 200 tiros de los dos dados.

Compara el resultado de los tiros electrónicos con las probabilidades de los eventos de los juegos que diseñaron.

Intercambien experiencias con otros equipos y comenten con su profesor.

Lectura

¿Cuál es el color del otro lado?

El profesor lleva tres tarjetas al salón. Una es azul por los dos lados, otra es roja por los dos lados, y la tercera tiene un lado rojo y otro azul.

El profesor mezcla bien las tarjetas, y sin ver toma una y la pone en el pizarrón para que todos vean sólo un lado.

Supongamos que lo que se ve es un lado rojo, ¿cuál es la probabilidad de que el otro lado de la tarjeta sea también rojo?

Estimen la probabilidad y den sus argumentos. ______

Si hay dudas, pueden calcular una probabilidad frecuencial. Traten de explicar sus observaciones, y comenten con su profesor.

EN RESUMEN

Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección y en cuáles todavía no te sientes muy seguro, con respecto al análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, basado en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables. Comenten en grupo su resumen.

Evaluación Bloque V

Evalúa lo que aprendiste en el bloque V, resolviendo los siguientes problemas.

¿Oro o plata?

1. Resuelve el siguiente problema con ayuda de tus conocimientos de física.
Si la densidad media de una sustancia es la razón entre la masa de un cuerpo y el volumen que ocupa, ¿cuál es la expresión algebraica que representa esta propiedad de la materia?
La tabla EV.1 representa el peso de varias muestras de una sustancia y el volumen que ocupa.

Volumen	Peso
cm^3	Gramos
30	231
60	462
90	693
120	924
150	1 155

Tabla EV.1

¿De qué sustancia se trata? Consulta en un libro de física una tabla de densidades para que puedas saber cuál es a partir del resultado que obtengas.

(A) Oro (B) Plata (C) Cobre (D) Hierro

2. Si se tiene un contenedor lleno de esta sustancia y el volumen del contenedor es de 500 cm^3, ¿cuánto pesa la cantidad de sustancia contenida en él?

En cilindros o en conos

3. Si se hace un corte de 12 cm paralelo a la base del cono, ¿cuánto medirá el radio del nuevo cono formado?

(A) 1.1 cm

(B) 3.6 cm

(C) 4.5 cm

(D) 7.2 cm

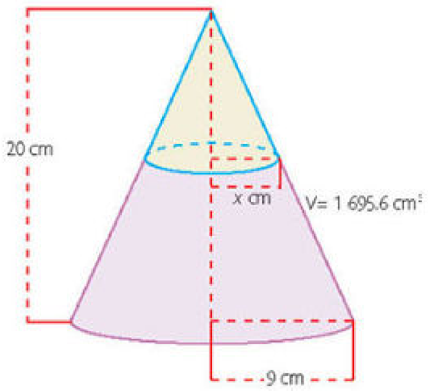


Figura EV.1

a) Calcula el volumen de algún cilindro que encuentres y anótalo.

Intercambia tu cilindro con el de algún compañero y calcula el nuevo volumen.
Comparen sus respuestas y en caso de discrepancia investiguen cuál fue el error.

b) Calcula el volumen de algún cono que encuentres y anótalo.

Intercambia tu cono con el de algún compañero y calcula el nuevo volumen.
Comparen sus respuestas y en caso de discrepancia investiguen cuál fue el error.

c) ¿Cuánto mide la altura del cilindro?

(A) 6.4 cm

(B) 8.1 cm

(C) 12.7 cm

(D) 16.3 cm

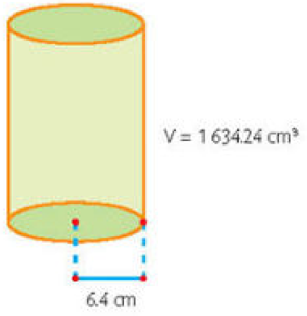


Figura EV.2

d) ¿Cuánto mide la altura del cono?

(A) 40 cm

(B) 20 cm

(C) 18 cm

(D) 36 cm

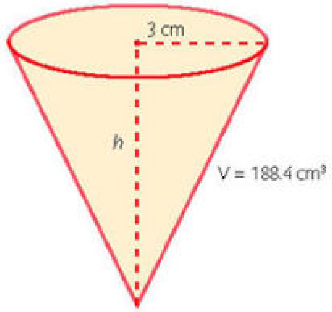


Figura EV.3

Viaja con seguridad

4. Un automóvil viaja a velocidad constante. En la tabla EV.2 se muestran algunas distancias y tiempos de su recorrido:

Tiempo (horas)	$\frac{1}{2}$	3	7
Distancia (kilómetros)	47.5	285	665

Tabla EV.2

La expresión algebraica que representa la relación entre tiempo y distancia recorrida por el auto es:

(A) $d = 95t$ (B) $d = 47.5 + 95t$

(C) $d = 9t^2$ (D) $y = 95 + 95x$

Marca la letra que corresponda a la gráfica (EV.4) que representa la relación entre tiempo y distancia recorrida por este auto:

A

B

C

D

Figura EV.4

Para conservar la amistad

5. Tres amigos van a tirar simultáneamente una moneda y un dado. En una tabla como la que mostramos a continuación elabora unas reglas que hagan que el juego sea justo.

	Jugador 1 gana si:	Jugador 2 gana si:	Jugador 3 gana si:
A			
B			
C			
D			

Tabla EV.3

Bibliografía

Para el alumno

Perelman, Y. *Álgebra recreativa*. Moscú, MIR, 1986.
Perelman, Y. *Aritmética recreativa*. Moscú, MIR, 1986.
Perelman, Y. *Matemáticas recreativas 1*. México, Ediciones Roca, 1989.
Perero, M. *Historia e historias de matemáticas*. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.
Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Trillas, 1976.
Tahan, M. *El hombre que calculaba*. México, Noriega, 1994.

Para el maestro

Alarcón, J. y Rosas, R. *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas*. México, Secretaría de Educación Pública, 1995.
Aragón, M., Benítez, R. y Valiente, S. *Diccionario de matemáticas para educación media*. México, Patria, 1988.
Bell, E. T. *Historia de las matemáticas*. México, Fondo de Cultura Económica, 1995.
Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. (Biblioteca del Normalista). España, SEP-Cooperación Española, 1998.
Gutiérrez, A. y Jaime, A. *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. *PISA en el aula, Matemáticas*. México, 2008.
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. *PISA para docentes, La evaluación como oportunidad de aprendizaje*. México, 2005.
Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. *Educación Matemática*. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.
Santos, L. M. *Principios y métodos para la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.
Secretaría de Educación Pública. *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación básica*. (Segunda edición revisada). México, 2001.
Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. *Enseñanza del álgebra elemental, una propuesta alternativa*. México, Trillas, 2005.
Waldegg, G. y Block, D. *Estudios en didáctica*. México, Grupo Editorial Iberoamérica 1997.

Obras consultadas

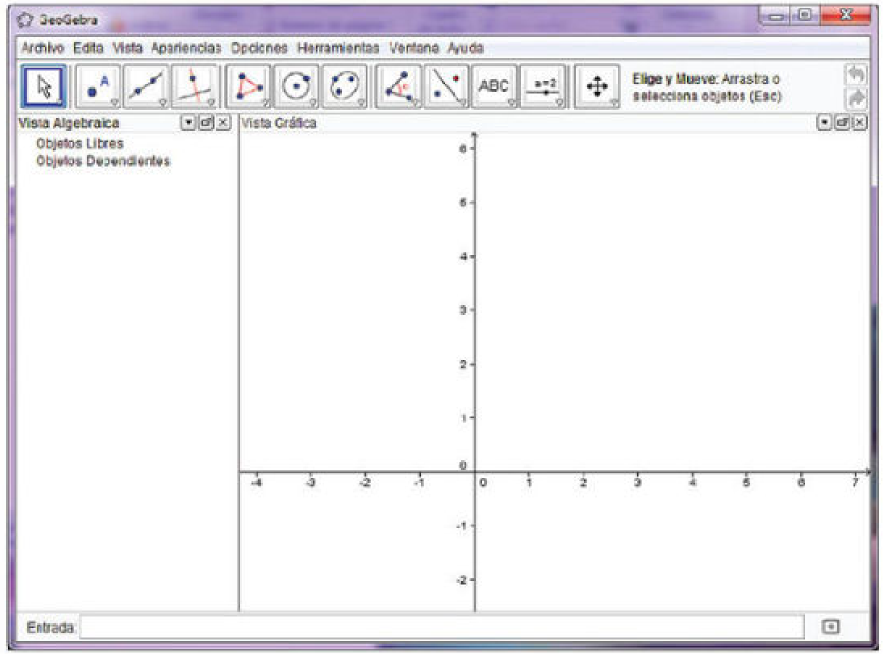
Bello, I. *Álgebra elemental*. S/d, International. Thomson Editores, 1999.
Colegio Nacional de Matemáticas. *Matemáticas simplificadas*. (segunda edición). México, Pearson, 2008.
Courant, R. y Robbins, H. *¿Qué es la matemática?* Madrid, Aguilar, 1962.
Díaz G. J., Batanero, M. C. y Cañizares, M. J. *Azar y probabilidad*. Madrid, Síntesis, 1996.
Editorial Planeta. *Nueva Enciclopedia Temática Planeta. Matemáticas*. Barcelona, Planeta, 1992.
De la Peña, J. A. *Álgebra en todas partes*. México, Fondo de Cultura Económica, 1999.
De la Peña, J. A. (compilador). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. México, Siglo XXI-UNAM, 2000.
Fendel, D., Resek, D., Alper, L. y Fraser, S. *Interactive Mathematics Program*. Berkeley, Key Curriculum Press, 1997.
Filloy, E. (1998). *Didáctica e historia de la geometría euclidiana*. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.
Filloy, E. (coordinador). *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. México, Fondo de Cultura Económica-Cinvestav, 2003.
Guillén, G. *El mundo de los poliedros*. Madrid, Síntesis. 1991.
Grupo Azarquiel. *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid, Síntesis, 1993.
Gustafson, D. R. *Álgebra intermedia*. S/d, International Thomson Editores, 1997.
Orton, A. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid, Ediciones Morata-Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2003.
Parra, C. y Saiz, I. (compiladoras). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós, 1994.
Secretaría de Educación Pública. *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las matemáticas con tecnología*. México, SEP-ILCE, 2000.
Secretaría de Educación Pública. *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México, SEP, 2001.
Secretaría de Educación Pública. *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*. México, SEP, 2001.
Secretaría de Educación Pública. *Programas de Estudio 2011. Educación básica. Secundaria. Matemáticas*. México, SEP, 2011.
Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid, Editorial Síntesis 1996.
Stewart, I. *Historia de las matemáticas en los últimos 10 000 años*. Barcelona, Crítica, 2012.
Triola, M. F. *Estadística*. (Novena edición). México, Pearson, 2006.
Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. *Enseñanza del álgebra elemental, una propuesta alternativa*. México, Trillas, 2005.

Sitios de internet y multimedia

http://www.infoaserca.gob.mx/avicolas/avc_huevo.asp Información económica y comercial sobre el comportamiento de los mercados agropecuarios nacionales e internacionales.
Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.
http://es.wikipedia.org/wiki/Sociedad_de_la_informaci%C3%B3n_y_del_conocimiento Información sobre el surgimiento, la importancia y el manejo de los conceptos: sociedad de la información y sociedad del conocimiento.
Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.
http://www.cienciaredcreativa.org/informes/caida%202.pdf Este portal ofrece información acerca de la aceleración de la gravedad y el análisis de las distintas características del movimiento de un cuerpo en caída libre. Así como información sobre el problema que enfrentó Galileo con las teorías de Aristóteles.
Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.
http://books.google.com.mx/books?id=4mV512v0U2IC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false Sitio de internet que ofrece la reseña en facsímil del libro: Sumario compendioso de las cuentas de plata y oro que en los reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y a todo género de tratantes: con algunas reglas tocantes a la aritmética, de Juan Diez Freyle.
Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html Este portal aborda y refuerza las matemáticas de primero a sexto grado escolar de forma fácil y divertida, mediante juegos, pruebas de evaluación (tests) y hojas de ejercicios.
Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.
http://www.geogebra.org Este portal ofrece enseñanza y aprendizaje de álgebra y geometría, por medio del programa interactivo GeoGebra.
Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm Portal que ofrece actividades interactivas sobre el teorema de Pitágoras.
Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.

En el siguiente sitio de internet puedes descargar gratis el programa *LOGO*, versión EMAT (bilingüe castellano/inglés), y usarlo para trazar diferentes triángulos:
www.matedu.cinvestav.mx/~asacristan/LogoEMAT.exe Fecha de consulta: 16 de octubre de 2016.

Una vez que descargues el programa, tendrás una pantalla como la siguiente, la cual consta de dos ventanas: la superior es la ventana de gráficas y la inferior es la ventana de texto o de trabajo (también llamada área de comandos).



En el área de entrada de comandos se escriben y ejecutan los comandos después de oprimir la tecla Enter o de hacer clic sobre el botón Ejecutar.

Para volver a ejecutar un comando, primero selecciona con la tecla flecha arriba o con el ratón la línea del comando que quieras ejecutar; posteriormente presiona la tecla Enter o el botón Ejecutar. (Si deseas hacerle algún cambio al comando, debes hacer clic sobre la ventana de entrada de comandos en la posición deseada; edita la línea y ejecútala.)

Para cualquier duda que tengas, teclea la palabra Demo en el área de entrada de comandos, así te dará una muestra de las características del programa.

A lo largo del libro habrá diversas oportunidades de usar este programa u otro que tengas. Generalmente funcionan en forma similar, pero deberás ir descubriendo las posibilidades de esta herramienta electrónica, usándola e intercambiando experiencias con tus compañeros.

Si no cuentas con algún software de geometría para hacer las actividades del libro, puedes bajar gratis y con instructivo en español Geogebra. Accede al sitio www.geogebra.org

Oprime el botón de descarga, sigue los pasos que se indiquen, y el software se instalará en tu computadora.

Cuando acerques el cursor a uno de los comandos, se verá una guía rápida de su uso. Investiga y practica, y pronto podrás manejar el Geogebra rápida y eficientemente.

Créditos iconográficos

Página	Imagen	Fuente
20	Figura 2.3	AE
24	Figura 2.10	AE
34	Figura 3.17	AE
36	Figura 3.22	Shuterstock
43	Figura 5.1	https://lh3.googleusercontent.com/-TUd0j8VI8tw/T_nm_rVbhpI/AAAAAAAAImY/qKNu8WlxmaY/s1600/Vanuatu-bungee_jumping.jpg
54	Figura 7.1	Trazo hecho para la edición
84	Figura 10.17	Shuterstock
84	Figura 10.18	Shuterstock
84	Figura 10.19	Shuterstock
84	Figura 10.20	Shuterstock
84	Figura 10.21	Shuterstock
84	Figura 10.22	Shuterstock
139	Figura 17.17	http://rhafotoblog.wordpress.com/tag/telescopio/
187	Figura 23.16	AE

Créditos iconográficos

230	Figura 28.2	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Einstein1921_by_F_Schmutzer_2.jpg
235	Figura 29.11	AE
236	Figura 29.12	Shuterstock
236	Figura 29.13	AE
241	Figura 30.10	AE
249	Figura 31.6	AE
250	Figura 31.7	http://agrega.educacion.es/galeriaimg/0c/es_20071227_1_5007544/es_20071227_1_5007544_captured.jpg
251	Figura 31.8	Shuterstock